

N^o D'ORDRE :
123

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR M. POL BODET

1^{re} THÈSE. — APPLICATION DU CALCUL DES VARIATIONS A L'ÉLASTICITÉ.

2^e THÈSE. — ÉTUDE DES VIBRATIONS DES STRUCTURES D'AVIONS.

Soutenues le

1945 devant la Commission d'Examen.

MM. BÉGHIN,
PÉRÈS,
VILLEY.

Président.

} *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1945

N° D'ORDRE :

123

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR M. POL BODET

1^{re} THÈSE. — APPLICATION DU CALCUL DES VARIATIONS A L'ÉLASTICITÉ.

2^e THÈSE. — ÉTUDE DES VIBRATIONS DES STRUCTURES D'AVIONS.

Soutenues le

1945 devant la Commission d'Examen.

MM. BÉGHIN,
PÉRÈS,
VILLEY.

Président.

} *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1945

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... PAUL MONTEL.

PROFESSEURS

CHARLES PÉREZ.....	†	Zoologie.	G. RIBAUD.....	†	Hautes températures.
P. MONTEL.....	†	Théorie des Fonctions.	CHAZY.....	†	Mécanique analytique.
L. BLARINGHEM.....	†	Botanique.	GAULT.....	†	Chimie (P.C.B.).
G. JULIA.....	†	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	CROZE.....	†	Physique théorique et Physique céleste.
C. MAUGUIN.....	†	Minéralogie.	DUPONT.....	†	Théories chimiques.
A. MICHEL-LÉVY.....	†	Pétrographie.	LANQUINE.....	†	Géologie structurale et géologie appliquée.
A. DENJOY.....	†	Géométrie supérieure.	VALIRON.....	†	Calcul différentiel et calcul intégral.
L. LUTAUD.....	†	Géographie physique et géologie dynamique.	BARRABÉ.....		Géologie structurale et Géologie appliquée.
E. BLOCH.....	†	Physique.	F. PERRIN.....		Théories physiques.
G. BRUHAT.....	†	Physique.	VAVON.....	†	Analyse et mesures chimiques.
E. DARMOIS.....	†	Enseignement de Physique.	G. DARMOIS.....	†	Mathématiques générales.
A. DEBIERNE.....	†	Électronique et Radioactivité.	CHATTON.....	†	Biologie maritime.
M. JAVILLIER.....	†	Chimie Biologique.	AUBEL.....		Chimie biologique.
ROBERT LÉVY.....	†	Physiologie comparée.	JACQUES BOURCART.		Géographie physique et Géologie dynamique.
HENRI VILLAT.....		Mécanique des fluides et applications.	M ^{me} JOLIOT-CURIE.		Physique générale et Radioactivité.
CH. JACOB.....	†	Géologie.	PLANTEFOL.....	†	Botanique.
P. PASCAL.....	†	Chimie générale.	CABANNES.....	†	Recherches physiques.
M. FRÉCHET.....	†	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	GRASSÉ.....	†	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
E. ESCLANGON.....	†	Astronomie.	PRÉVOST.....		Chimie organique.
M ^{me} RAMART-LUCAS	†	Chimie organique.	BOULIGAND.....		Mathématiques.
H. BÉGHIN.....	†	Mécanique physique et expérimentale.	CHAUDRON.....		Chimie.
FOCH.....	†	Mécanique expérimentale des fluides.	WYART.....		Minéralogie.
PAUTHENIER.....	†	Électrotechnique générale.	TEISSIER.....		Zoologie.
DE BROGLIE.....	†	Théories physiques.	MANGENOT.....		Biologie végétale (P. C. B.).
CHRÉTIEN.....		Optique appliquée.	P. AUGER.....		Physique.
JOB.....		Chimie générale.	MONNIER.....		Physiologie générale.
PRENANT.....	†	Anatomie et Histologie comparées.	PIVETEAU.....		Géologie.
VILLEY.....	†	Mécanique physique et expérimentale.	ROCARD.....		Physique.
COMBES.....	†	Physiologie végétale.	H. CARTAN.....		Calcul différentiel.
GARNIER.....	†	Application de l'Analyse à la Géométrie.	SCHAEFFER.....	†	Physiologie générale.
PÉRÈS.....	†	Mécanique rationnelle.	LAFFITTE.....		Chimie (P. C. B.).
HACKSPILL.....	†	Chimie minérale.	LERAY.....		Mécanique théorique des fluides.
LAUGIER.....	†	Physiologie générale.	FAVART.....		Calcul des probabilités. et Physique mathématique.
TOUSSAINT.....		Technique Aéronautique.	COULOMB.....	†	Physique du globe.
M. CURIE.....		Physique (P. C. B.).	M ^{lle} COUSIN.....		Biologie animale (P. C. B.).
			CHRÉTIEN.....		Analyse et mesures chimiques.
			DRACH.....		Évolution des êtres organisés.

Secrétaire..... CH. MONIER,

A MON FRÈRE

REMERCIEMENTS

En franchissant à nouveau les murs de l'Université, après de longues années d'absence, beaucoup d'Ingénieurs s'y trouveraient dépaysés si l'accueil le plus aimable ne leur était réservé. Pour ma part, j'ai trouvé en Monsieur BÉGHIN, un guide éclairé et particulièrement bienveillant ; il m'est un plaisir en même temps qu'un devoir de lui rendre hommage et je le prie de bien vouloir trouver ici l'expression de toute ma gratitude.

Je remercie respectueusement Monsieur PÉRÈS et Monsieur VILLEY d'avoir daigné accepter de faire partie du Jury, et je leur sais gré d'avoir au milieu de leurs occupations consacré de trop longs instants à l'examen de mon modeste travail.



PREMIÈRE THÈSE.

APPLICATION

DU

CALCUL DES VARIATIONS

A L'ÉLASTICITÉ

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE.

Le général Ménabréa en énonçant le 31 mai 1858 à l'Académie des Sciences de Turin, le théorème qui porte son nom allait donner à la Résistance des matériaux une orientation nouvelle. Quelques années plus tard, en 1875, Castigliano établissait sur les dérivées du travail un théorème non moins important [*Nouvelle théorie de l'équilibre des systèmes articulés (Actes de l'Académie de Turin, 1875)*]. Dès lors des méthodes nouvelles se répandaient rapidement à l'étranger alors qu'en France leur développement était plus lent en raison d'un accueil qui ne leur était pas toujours favorable. En 1907 cependant, Bertrand de Fontviolant, établit son équation générale de l'Élasticité (*Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France*, octobre 1907), et en 1921, M. Liénard donne une démonstration rigoureuse de la proposition de Ménabréa. Actuellement les Méthodes dites modernes de la résistance des matériaux ont acquis chez nous droit de cité et personne ne conteste plus leurs avantages.

Nous avons été amené nous-même à utiliser le théorème du travail minimum pour donner une solution au problème des ailes d'avions constituées par deux longerons entretoisés par un revêtement rigide et chargées d'une façon quelconque [*Le calcul des ailes à revêtement travaillant (l'Aérophile)* novembre et décembre 1933]. Nous avons résolu ce problème en ayant recours à la Théorie du Calcul des variations et nous croyions alors avoir indiqué une voie nouvelle

pour l'étude des problèmes d'élasticité. La *Théorie de l'Élasticité*, par S. Timoshenko, Paris, 1936, nous a fait connaître que Ritz s'était engagé dans la même voie pour étudier les problèmes de la flexion et de la vibration des plaques rectangulaires (*Annalen der Physik*, t. 4, vol. 28, 1909, p. 737). Timoshenko, d'ailleurs, reprend la méthode indiquée par Ritz pour trouver des solutions approchées aux problèmes de torsion des poutres prismatiques.

En ce qui concerne les applications aux « structures coques », nous rappellerons que M. Leduc a été l'initiateur en France des méthodes universellement employées à l'heure actuelle et qui reposent sur l'existence du centre de cisaillement (*Contribution à l'étude des Poutres prismatiques*. Thèse de Doctorat d'Université, Paris, 1929).

Enfin, ferons-nous remarquer, la solution que nous donnons pour les poutres ouvertes (de longueur illimitée) sollicitées par un couple de torsion remonte à 1937 (elle figure dans un Mémoire de Calculs de Résistance de coque d'hydravion remis aux services officiels) et est en accord avec les résultats indiqués par Lockwood Taylor (*Aircraft Engineering*, octobre 1938).



CHAPITRE I.

DÉTERMINATION DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉLASTICITÉ PAR LE CALCUL DES VARIATIONS.

I. — GÉNÉRALITÉS.

Le théorème du travail minimum est couramment utilisé en résistance des matériaux pour rechercher soit les forces de liaison d'un système non statiquement déterminé, soit les tensions dans une structure à barres surabondantes. On peut concevoir que la solution d'un problème ne dépende plus de la connaissance de quelques réactions inconnues, mais d'un certain nombre de fonctions d'une ou plusieurs variables; dans ce cas le théorème du travail minimum s'appliquera encore, mais l'instrument mathématique auquel il faudra avoir recours pour déterminer ces fonctions inconnues sera le Calcul des variations. Ayant résolu par cette méthode un certain nombre de problèmes particuliers, il nous a semblé intéressant d'exposer pour les corps isotropes les fondements de la théorie de l'élasticité en partant de la loi de Hooke et en introduisant les coefficients E et m (inverse du coefficient de Poisson) directement accessibles à l'expérience; en utilisant le théorème du travail minimum après l'avoir démontré d'ailleurs, nous obtenons les formules de Lamé.

II. — RAPPEL DE QUELQUES RÉSULTATS DE LA THÉORIE DU CALCUL DES VARIATIONS.

Le principal objet du Calcul des variations est la recherche des fonctions rendant minimum une intégrale définie. C'est le problème que nous aurons à résoudre et qui se présentera sous la forme suivante :

Soient u , v , w des fonctions des variables indépendantes x , y , z , et soit I l'intégrale définie

$$I = \iiint_V F\left(x, y, z; u, v, w; \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}; \dots\right) dV.$$

Les fonctions u , v , w assujetties le long de la frontière du domaine d'intégration à certaines conditions qui doivent achever de les préciser et rendant

minimum l'intégrale I satisfait aux équations différentielles suivantes :

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} \right) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} \right) = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Si entre les fonctions u, v, w et leurs dérivées partielles, il existe des relations vérifiées dans le domaine d'intégration

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z; u, v, w; \frac{\partial u}{\partial x}, \dots) &= 0, \\ \varphi_2(x, y, z; u, v, w; \frac{\partial u}{\partial x}, \dots) &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

les relations différentielles ci-dessus subsistent à condition de remplacer la fonction F par la fonction

$$\Phi = F + \xi_1 \varphi_1 + \xi_2 \varphi_2 + \dots,$$

$\xi_1, \xi_2, \dots$ désignant des fonctions inconnues de x, y, z . Si, de plus, il existe un certain nombre d'intégrales définies ayant une valeur constante telle que

$$\begin{aligned} \iiint_V f_1(x, y, z; u, v, w; \dots) dV &= A_1, \\ \iiint_V f_2(x, y, z; u, v, w; \dots) dV &= A_2, \end{aligned}$$

on devra considérer la fonction

$$\psi = \Phi + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots$$

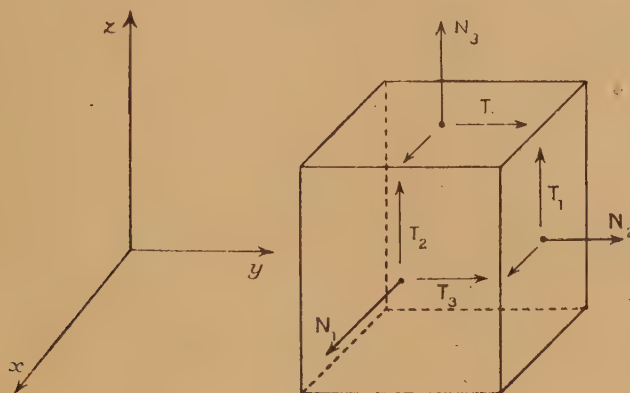
dans laquelle $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ sont des constantes et l'on écrira que les relations I sont vérifiées par la fonction ψ .

III. — RAPPEL DE QUELQUES ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES CONTRAINTES.

Si dans un corps solide soumis à l'action de forces extérieures, on isole un parallélépipède infiniment petit dont les faces sont parallèles aux plans de coordonnées (supposées trirectangulaires), ce parallélépipède est en équilibre sous l'action de forces unitaires normales N_1, N_2, N_3 et tangentielles T_1, T_2, T_3 appliquées aux centres des différentes faces comme le montre la figure 1.

Ces forces unitaires sont des fonctions des coordonnées de leurs points d'application et les équations de projection suivant les trois axes de coor-

Fig. 1.

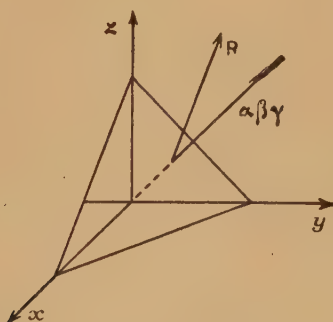


données conduisent aux relations

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

à condition de négliger les forces de volume qui sont des infiniment petits du troisième ordre vis-à-vis des forces de surface qui ne sont que du deuxième ordre.

Fig. 2.



La tension qui s'exerce sur un plan dont la normale a pour cosinus directeurs α , β , γ , a pour composantes

$$\begin{aligned} X &= N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma, \\ Y &= T_3 \alpha + N_2 \beta + T_1 \gamma, \\ Z &= T_2 \alpha + T_1 \beta + N_3 \gamma. \end{aligned}$$

Si cette tension est dirigée suivant la normale et si N est son intensité, on a

$$X = N\alpha = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma,$$

$$Y = N\beta = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma,$$

$$Z = N\gamma = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma,$$

il en résulte le système suivant

$$(IV) \quad \begin{cases} (N_1 - N)\alpha + T_3\beta + T_2\gamma = 0, \\ T_3\alpha + (N_2 - N)\beta + T_1\gamma = 0, \\ T_2\alpha + T_1\beta + (N_3 - N)\gamma = 0; \end{cases}$$

ces trois équations homogènes en α, β, γ ne sont compatibles que si le déterminant

$$\begin{vmatrix} N_1 - N & T_3 & T_2 \\ T_3 & N_2 - N & T_1 \\ T_2 & T_1 & N_3 - N \end{vmatrix} = 0.$$

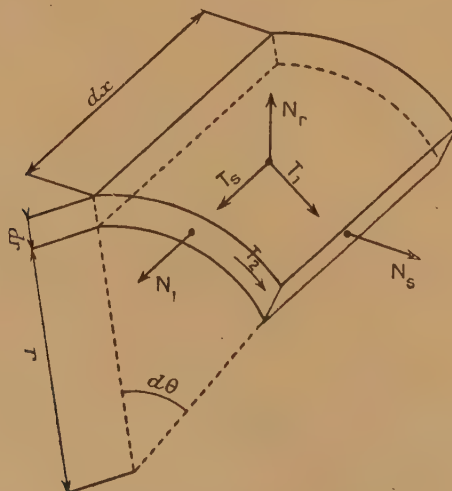
Le développement de ce déterminant conduit à l'équation

$$(I) \quad N^3 - N^2 \Sigma N_i + N[\Sigma N_i N_2 - \Sigma T_i^2] + N_1 N_2 N_3 + 2 T_1 T_2 T_3 - \Sigma N_i T_i^2 = 0.$$

Les racines de cette équation sont les tensions principales.

Au lieu de considérer un parallélépipède élémentaire et d'utiliser les coordonnées cartésiennes, on peut raisonner sur un élément cylindrique et se servir de coordonnées semi-curvilignes. Soit r le rayon du cylindre, dr l'épaisseur de l'élément et $d\theta$ son angle d'ouverture; l'élément d'arc est donc $ds = r d\theta$.

Fig. 3.



Nous supposons l'axe du cylindre dirigé suivant l'axe des x . Les tensions normales seront désignées par N_1, N_2, N_3 et les tensions tangentielle par T_1, T_2, T_3 (fig. 3). Cet élément étant en équilibre, les projections des forces qui le

sollicitent sont nulles. On obtient ainsi les relations suivantes :

$$(V) \quad \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_r}{\partial s} + \frac{\partial T_s}{\partial r} + \frac{T_s}{r} = 0, \\ \frac{\partial T_r}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{2T_1}{r} = 0, \\ \frac{\partial T_s}{\partial r} + \frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_s}{r} = 0. \end{cases}$$

Nous utiliserons ces équations au chapitre suivant en traitant quelques cas concrets.

IV. — LA LOI DE HOOKE ET SES CONSÉQUENCES.

a. Le théorème de Castigliano. — Dans le paragraphe précédent, nous avons admis l'existence des contraintes, mais sans nous préoccuper de leur origine. La loi de Hooke suppose que les contraintes à l'intérieur du solide élastique sont proportionnelles aux déformations. Le théorème de Castigliano résulte directement de cette loi en admettant de plus qu'un état de tensions correspondant à des charges déterminées est indépendant de la façon dont ces charges ont été appliquées. (Principe de superposition des effets de forces.)

Considérons tout d'abord un solide soumis à l'action d'une seule force F et maintenu en position par un système d'appuis quelconque. Ce solide se déforme, et nous désignons par f le déplacement du point d'application de la force F mesuré suivant sa direction. Si nous faisons croître la force F d'une quantité infiniment petite dF , la flèche augmente de df et la partie principale du travail produit est $F df$ de sorte que l'on peut écrire en désignant par W le potentiel interne du solide

$$dW = F df.$$

En supposant les déformations proportionnelles aux forces, on peut écrire

$$f = KF \quad \text{et ainsi} \quad df = K dF.$$

On en déduit

$$dW = F \times K dF = f dF, \quad \text{d'où} \quad \frac{dW}{dF} = f.$$

Donc dans le cas d'une force unique, si l'on peut exprimer le potentiel interne du solide en fonction de l'effort appliqué, la dérivée du potentiel interne par rapport à la force sera égale au déplacement projeté sur la direction de la force.

Ce résultat peut s'étendre au cas de plusieurs forces et devient le théorème de Castigliano. Soient F_1 et F_2 deux forces appliquées à un corps. L'expression du potentiel interne est une fonction de ces deux forces

$$W = \Phi(F_1, F_2).$$

Par conséquent

$$dW = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial F_2} dF_2.$$

Soient A_1 et A_2 les points d'application des forces F_1 et F_2 parallèles à deux directions X_1 et X_2 , et désignons par λ_{11} , le déplacement de A_1 mesuré suivant X_1 sous l'action d'une force égale à 1 et parallèle à X_1 et par λ_{21} , le déplacement de A_2 mesuré suivant X_2 sous l'action de la même force unité appliquée en A_1 . Pour une force unité appliquée en A_2 dans la direction X_2 , nous définirons de même deux coefficients λ_{22} et λ_{12} . Ainsi donc si f_1 et f_2 sont les déplacements des points A_1 et A_2 sous l'action des forces F_1 et F_2 , ces déplacements varieront de df_1 et df_2 lorsque l'on fera croître les forces F_1 et F_2 de dF_1 et dF_2 . Il en résulte

$$df_1 = \lambda_{11} dF_1 + \lambda_{12} dF_2,$$

$$df_2 = \lambda_{21} dF_1 + \lambda_{22} dF_2,$$

$$dW = F_1 df_1 + F_2 df_2 = dF_1 [\lambda_{11} F_1 + \lambda_{21} F_2] + dF_2 [\lambda_{12} F_1 + \lambda_{22} F_2].$$

On en déduit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial F_1} = \lambda_{11} F_1 + \lambda_{21} F_2,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial F_2} = \lambda_{12} F_1 + \lambda_{22} F_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial F_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial F_1} \right) = \lambda_{21} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_1 \partial F_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial F_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial F_2} \right) = \lambda_{12} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_1 \partial F_2}.$$

Par suite $\lambda_{12} = \lambda_{21}$ et

$$\frac{\partial \Phi}{\partial F_1} = \lambda_{11} F_1 + \lambda_{12} F_2 = f_1,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial F_2} = \lambda_{21} F_1 + \lambda_{22} F_2 = f_2.$$

Lorsque le solide est en équilibre sous l'action de forces extérieures $F_1, F_2, \dots, F_n$, il y a une infinité de fonctions $\Phi(F_1, \dots, F_n)$ exprimant le potentiel interne puisque entre ces forces il existe 6 relations d'équilibre. On peut cependant étendre à ce cas les résultats du théorème de Castiglione. Imaginons un système de liaisons isostatiques infiniment rigides maintenant le solide en position et exprimons le potentiel interne du système en fonction des forces $F_1, F_2, \dots, F_n$ supposées indépendantes. Les déplacements des différents points d'application des forces ont pour valeur

$$\lambda_1 = \frac{\partial W}{\partial F_1}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial W}{\partial F_2}, \quad \dots, \quad \lambda_n = \frac{\partial W}{\partial F_n}.$$

Si l'on fait varier les forces extérieures de telle sorte qu'elles forment un système en équilibre, les réactions d'appui s'annulent et les relations ci-dessus

subsistent donnant à la limite les déplacements des points d'application des forces, mais ces déplacements dépendent évidemment du choix des points de liaison.

Dans le cas où deux forces appliquées F_1 ou F'_1 sont proportionnelles, on peut exprimer le potentiel interne sous deux formes différentes

$$W = \Phi(F_1, F'_1, F_2, \dots, F_n) = \Phi(F_1, F_2, \dots, F_n);$$

les déplacements projetés des points d'application des forces sont λ_1 et λ'_1 tels que

$$\lambda_1 + \lambda'_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial F'_1};$$

mais

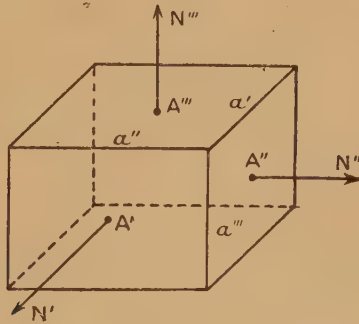
$$\frac{\partial \Phi}{\partial F_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial F'_1} \frac{dF'_1}{dF_1} = \lambda_1 + \lambda'_1 \frac{dF'_1}{dF_1};$$

si donc $F'_1 = KF_1$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial F_1} = \lambda_1 + K\lambda'_1.$$

b. Calcul du Potentiel interne en fonction des tensions en Milieu isotrope. — Considérons un parallélépipède élémentaire dont les arêtes de longueur $a' a'' a'''$ sont parallèles aux directions principales. Nous désignons par E le module d'élasticité, par $\frac{1}{m}$ le coefficient de Poisson, par $N' N'' N'''$ les trois tensions principales.

Fig. 4.



La face $a'' a'''$ est sollicitée par une force $N' a'' a'''$ appliquée en un point A' , l'autre face parallèle à la face $a'' a'''$ est sollicitée par une force égale et opposée. Les points d'application de ces deux forces se déplacent l'un par rapport à l'autre de

$$N' \frac{a'}{E} - \frac{1}{m} \left(N'' \frac{a'}{E} + N''' \frac{a'}{E} \right).$$

Le travail des forces N' est donc, si on les suppose atteindre graduellement leur valeur,

$$N' \frac{a'' a'''}{2} \left[N' \frac{a'}{E} - \frac{1}{m} \left(N'' \frac{a'}{E} + N''' \frac{a'}{E} \right) \right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{a' a'' a'''}{2E} \left[N'^2 - \frac{1}{m} (N' N'' + N'' N') \right].$$

Pour l'ensemble des forces $N' a'' a'''$, $N'' a' a'''$, $N''' a' a''$, le travail de déformation de l'élément considéré sera

$$\frac{a' a'' a'''}{2E} \left[\Sigma N'^2 - \frac{2}{m} \Sigma N' N'' \right].$$

On peut transformer cette expression de façon à faire apparaître les tensions N_1 , N_2 , N_3 , T_1 , T_2 , T_3 ; d'après l'équation (1)

$$\Sigma N' N'' = \Sigma N_1 N_2 - \Sigma T_1^2$$

et

$$\Sigma N'^2 = (\Sigma N')^2 - 2 \Sigma N' N'' = (\Sigma N_1)^2 - 2 \Sigma N_1 N_2 + 2 \Sigma T_1^2 = \Sigma N_1^2 + 2 \Sigma T_1^2;$$

par suite

$$\Sigma N'^2 - \frac{2}{m} \Sigma N' N'' = \Sigma N_1^2 - \frac{2}{m} \Sigma N_1 N_2 + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \Sigma T_1^2.$$

On sait d'autre part, d'après la définition qui en est posée, que le potentiel interne d'un solide est donné par une intégrale triple étendue à ce domaine. Son élément différentiel s'obtient en imaginant un petit volume élémentaire quelconque entourant le point xyz , par exemple le petit parallélépipède étudié ci-dessus. Le potentiel interne de ce petit solide est, en appelant $d\tau = a' a'' a'''$, son volume

$$(2) \quad d\tau \left[\Sigma N_1^2 - \frac{2}{m} \Sigma N_1 N_2 + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \Sigma T_1^2 \right],$$

d'où pour le potentiel du solide entier

$$(3) \quad W = \iiint_V \frac{d\tau}{2E} \left[\Sigma N_1^2 - \frac{2}{m} \Sigma N_1 N_2 + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \Sigma T_1^2 \right].$$

c. Détermination des déplacements en fonction des tensions. — Considérons maintenant un petit parallélépipède dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées et de longueurs dx , dy , dz . Ce parallélépipède est en équilibre sous l'action des tensions N_1 , N_2 , N_3 , T_1 , T_2 , T_3 et le potentiel interne de cet élément est une quantité infiniment petite W donnée par l'expression (2) dans laquelle $d\tau = dx dy dz$. Le centre de ce parallélépipède (supposé appartenir à un solide) subit dans la déformation un déplacement dont les projections sur les axes sont u , v , w . Les forces normales appliquées aux différentes faces ont pour valeur

$$F_1 = N_1 dy dz, \quad F_2 = N_2 dz dx, \quad F_3 = N_3 dx dy.$$

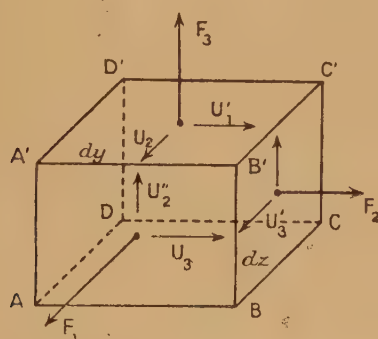
Quant aux forces tangentiellees appliquées elles sont

$$\begin{aligned} U_1 &= T_1 dx dz, & U'_1 &= T_1 dx dz; \\ U_2 &= T_2 dy dx, & U'_2 &= T_2 dy dz; \\ U_3 &= T_3 dz dy, & U'_3 &= T_3 dz dx. \end{aligned}$$

La première composante du déplacement du point d'application de la force F_1 , situé dans le plan $BB'AA'$ compté à partir du plan $DD'CC'$, est un infiniment petit

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{\partial W}{\partial N_1} \frac{dN_1}{dF_1} = \frac{\partial W}{\partial N_1} \frac{1}{dy dz} = \frac{1}{E} \left[N_1 - \frac{1}{m} (N_2 + N_3) \right] dx,$$

Fig. 5.



d'après le théorème de Castigliano, d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \left[N_1 - \frac{1}{m} (N_2 + N_3) \right] &= \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_1, \\ \frac{1}{E} \left[N_2 - \frac{1}{m} (N_3 + N_1) \right] &= \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_2, \\ \frac{1}{E} \left[N_3 - \frac{1}{m} (N_1 + N_2) \right] &= \frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_3. \end{aligned}$$

De même les déplacements des points d'application des forces U_1 et U'_1 projetés sur ces forces sont des infiniment petits $\frac{\partial w}{\partial y} dy$ et $\frac{\partial v}{\partial z} dz$ tels que

$$\frac{\partial W}{\partial U_1} = \frac{\partial W}{\partial T_1} \frac{dT_1}{dU_1} = \frac{4}{2E} \left(1 + \frac{1}{m} \right) T_1 \frac{1}{dx dz} dx dy dz = \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \frac{dy}{dz},$$

d'où

$$\frac{2}{E} \left(1 + \frac{1}{m} \right) T_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 2 \gamma_1,$$

et également

$$\begin{aligned} \frac{2}{E} \left(1 + \frac{1}{m} \right) T_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2 \gamma_2, \\ \frac{2}{E} \left(1 + \frac{1}{m} \right) T_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \gamma_3. \end{aligned}$$

Ces formules sont connues sous le nom de *formules de Lamé*, et l'on voit qu'elles peuvent se rattacher au théorème de Castigliano.

V. — LE THÉORÈME DU TRAVAIL MINIMUM.

Le théorème de Castigliano est généralement utilisé pour la détermination des réactions d'appui dans le cas de systèmes non statiquement déterminés. On rend le système isostatique en supprimant les liaisons surabondantes, puis on exprime le potentiel interne du système en fonction des liaisons supplémentaires inconnues indépendantes $R_1, R_2, \dots, R_p$. Si les appuis sont infiniment rigides, les déplacements des points d'application des réactions sont normaux à ces réactions et en vertu des résultats précédents

$$\frac{\partial W}{\partial R_1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial R_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial R_p} = 0.$$

Si les appuis sont déformables, il faut ajouter au potentiel interne du solide S celui des appuis qui constituent un solide S' , lui-même maintenu par un système de liaisons isostatiques rigides. Ce solide S' est soumis à l'action de forces opposées aux réactions qui équilibrent le solide S . Le potentiel du système (SS') dépend donc des forces indépendantes $R_1, \dots, R_p$ qui sont introduites par paires. La dérivée du potentiel de (SS') par rapport à R_p représente la somme des déplacements des points d'application des forces R_p considérées comme appartenant à S et à S' . Ces forces sont opposées et leurs points d'application sont solidaires. Il en résulte

$$\frac{\partial W}{\partial R_1} = 0 \quad \text{et également} \quad \frac{\partial W}{\partial R_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial R_p} = 0.$$

Ces relations signifient que les valeurs des réactions indépendantes rendent le potentiel interne W extremum; si l'on exprime W en fonction de toutes les réactions d'appui liées entre elles par les équations d'équilibre, on pourra dire que l'ensemble de ces réactions rend extremum le potentiel interne, étant entendu que les charges extérieures données restent constantes.

On peut généraliser ces résultats et les étendre au cas d'un solide quelconque qui peut être considéré comme un ensemble de petits parallélépipèdes en équilibre sous l'action des forces de contact normales et tangentielles. Il y a 3 forces de contact sur chaque face d'un parallélépipède, donc 18 pour l'ensemble des 6 faces et finalement 12 réactions indépendantes, si l'on tient compte des 6 équations d'équilibre. D'autre part les forces appliquées à 2 faces en contact étant égales et opposées, on aura 3 relations à écrire par face commune à 2 éléments. Pour les éléments dont une face est formée par une portion de la surface extérieure du corps, il y aura 3 inconnues de moins. Il subsistera alors un certain nombre de paires de réactions inconnues indépendantes R_p pour

lesquelles les points d'application étant solidaires, on devra avoir $\frac{\partial W}{\partial R_p} = 0$. Si le nombre des éléments est infiniment grand, les réactions mutuelles considérées ne sont autres que les tensions et il en résulte que l'ensemble de celles-ci rend extremum le potentiel interne du solide, les conditions auxquelles doivent satisfaire les tensions à l'intérieur du corps [système (II)] et à la surface [équations (III)] du fait que X, Y, Z restent constants, étant supposées vérifiées. Nous donnons, ci-après d'ailleurs, une démonstration analytique de cet important théorème.

Reprenons l'expression (3) relative au potentiel interne

$$W = \frac{1}{2E} \iiint_V \left[N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 - \frac{2}{m} (N_1 N_2 + N_2 N_3 + N_3 N_1) + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2) \right] d\tau$$

et donnons à $N_1, N_2, \dots, T_3$ des accroissements $\delta N_1, \delta N_2, \dots, \delta T_3$, qui vérifient, d'une part à l'intérieur du volume V, les équations II,

$$(II') \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (\delta N_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta T_3) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta T_2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (\delta T_3) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta N_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta T_1) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (\delta T_2) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta T_1) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta N_3) = 0, \end{cases}$$

et d'autre part les équations (III) à la surface

$$(III') \quad \begin{cases} \alpha \delta N_1 + \beta \delta T_3 + \gamma \delta T_2 = \delta X, \\ \alpha \delta T_3 + \beta \delta N_2 + \gamma \delta T_1 = \delta Y, \\ \alpha \delta T_2 + \beta \delta T_1 + \gamma \delta N_3 = \delta Z, \end{cases}$$

$\delta X, \delta Y, \delta Z$ sont les accroissements des forces extérieures X, Y, Z.

Les tensions $N_1, N_2, N_3, \dots, T_3$ vérifient les mêmes systèmes d'équations et de plus les relations de Lamé.

L'accroissement du potentiel interne a pour valeur

$$dW = \frac{1}{E} \iiint_V \left\{ \delta N_1 \left[N_1 - \frac{2}{m} (N_2 + N_3) \right] + \dots + 2 \delta T_1 \left(1 + \frac{1}{m} \right) T_1 + \dots \right\} d\tau.$$

Nous allons montrer que cette expression est nulle si $\delta X, \delta Y, \delta Z$ sont nuls.

Considérons pour cela l'intégrale double

$$\iint_{\Omega} (u \delta X + v \delta Y + w \delta Z) d\Omega$$

qui est évidemment nulle si $\delta X = \delta Y = \delta Z = 0$.

En tenant compte des relations (III') cette intégrale peut se mettre sous la forme

$$0 = \iint_{\Omega} [u(\alpha \delta N_1 + \beta \delta T_3 + \gamma \delta T_2) + v(\alpha \delta T_3 + \dots) + w(\alpha \delta T_2 + \dots)] d\Omega$$

ou encore

$$0 = \iint_{\Omega} [\alpha(u \delta N_1 + v \delta T_3 + w \delta T_2) + \beta(u \delta T_3 + \dots) + \gamma(u \delta T_2 + \dots)] d\Omega$$

qui, transformée par la formule d'Ostrogradsky, devient

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \delta N_1 + v \delta T_3 + w \delta T_2) + \frac{\partial}{\partial y} (u \delta T_3 + v \delta N_2 + w \delta T_1) + \frac{\partial}{\partial z} (u \delta T_2 + v \delta T_1 + w \delta N_3) \right] d\tau \\ &= \iiint_V \left\{ u \left[\frac{\partial}{\partial x} (\delta N_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta T_3) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta T_2) \right] + v \left[\frac{\partial}{\partial x} (\delta T_3) + \dots \right] + w \left[\frac{\partial}{\partial x} (\delta T_2) + \dots \right] d\tau \right. \\ &\quad \left. + \iiint_V \left[\delta N_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \delta N_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \delta N_3 \frac{\partial w}{\partial z} + \delta T_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \delta T_2 (\dots) + \delta T_3 (\dots) \right] d\tau. \right\} \end{aligned}$$

La première de ces intégrales est nulle en raison des équations (II). Quant à la deuxième, si tenant compte des formules de Lamé on y remplace

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{par} \quad \frac{1}{E} \left[N_1 - \frac{1}{m} (N_2 + N_3) \right],$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \quad \dots \dots \dots,$$

$$\dots \dots \dots;$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{par} \quad \frac{2}{E} \left(1 + \frac{1}{m} \right) T_1,$$

$$\dots \dots \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

on voit qu'elle s'identifie à l'expression dW ci-dessus, qui par conséquent est nulle, et le potentiel interne W est stationnaire. Cette propriété suffit pour la résolution des problèmes d'élasticité, mais, en fait, il s'agit d'un minimum. La démonstration en a été donnée par plusieurs auteurs, entre autres M. Liénard (*Bulletin des Sciences mathématiques*, janvier 1921).

VI. — ÉTABLISSEMENT A L'AIDE DU CALCUL DES VARIATIONS DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRICITÉ.

D'après ce que nous avons vu, les fonctions $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ liées par les relations

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

doivent rendre minimum le potentiel interne représenté par l'expression

$$W = \frac{1}{2E} \iiint_V \left[N_1^2 + \dots - \frac{2}{m} (N_1 N_2 + \dots) + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) (T_1^2 + \dots) \right] d\tau.$$

On est ainsi amené à envisager la fonction

$$\Phi = \frac{1}{2E} \left[N_1^2 + \dots - \frac{2}{m} (N_1 N_2 + \dots) + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) (T_1^2 + \dots) \right] \\ + \xi \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) + \eta \left(\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) + \zeta \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} \right),$$

dans laquelle ξ, η, ζ sont des fonctions inconnues

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial N_1} &= \frac{1}{E} \left[N_1 - \frac{1}{m} (N_2 + N_3) \right], & \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \right)} &= \xi, \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\ \frac{\partial \Phi}{\partial T_1} &= \frac{2}{E} \left(1 + \frac{1}{m} \right) T_1, & \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial T_1}{\partial y} \right)} &= \zeta, & \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial T_1}{\partial z} \right)} &= \eta, \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \end{aligned}$$

Le minimum du potentiel interne est obtenu lorsque les équations ci-après sont vérifiées,

$$(VI) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{E} \left[N_1 - \frac{1}{m} (N_2 + N_3) \right] - \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{E} \left[N_2 - \frac{1}{m} (N_3 + N_1) \right] - \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0, \\ \frac{1}{E} \left[N_3 - \frac{1}{m} (N_2 + N_1) \right] - \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= 0; \\ \frac{2}{E} \left(1 + \frac{1}{m} \right) T_1 - \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} &= 0, \\ \frac{2}{E} \left(1 + \frac{1}{m} \right) T_2 - \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= 0, \\ \frac{2}{E} \left(1 + \frac{1}{m} \right) T_3 - \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ces équations sont les équations de Lamé, que nous avons obtenues plus haut au moyen du théorème de Castigliano et les multiplicateurs ξ, η, ζ ne sont autres que les composantes des déplacements suivant les axes de coordonnées.

VII. — CONCLUSIONS.

L'application du théorème du travail minimum aux problèmes d'élasticité conduisant aux équations classiques de l'élasticité ne permettra pas de surmonter les difficultés de calcul auxquelles on se heurte en général. Nous montrerons cependant par quelques exemples faisant l'objet du chapitre suivant que les solutions obtenues par le calcul des variations sont dans

l'ensemble plus simples. Lorsque pour résoudre un problème, on est conduit à faire des hypothèses simplificatrices, il nous semble qu'en utilisant le théorème du travail minimum, l'on se rende mieux compte des approximations admises, car celles-ci reviennent en général à négliger dans le travail de déformation un certain nombre de termes. Une fois la solution trouvée, il est possible de déterminer la valeur des termes négligés et de voir si effectivement ils étaient négligeables.

Nous ajouterons enfin pour être complet une restriction. La méthode du travail minimum suppose pour être applicable que les équations d'équilibre ne sont pas modifiées par les déformations. Les déformations ont pour effet de rendre approximatives dans des limites plus ou moins grandes toute solution théorique. La solution de Saint-Venant pour les pièces prismatiques par exemple, qui est une solution théorique exacte, devient une solution approchée dès que la poutre cesse sous l'influence des charges appliquées d'être prismatique et que la ligne neutre primitivement rectiligne s'infléchit.



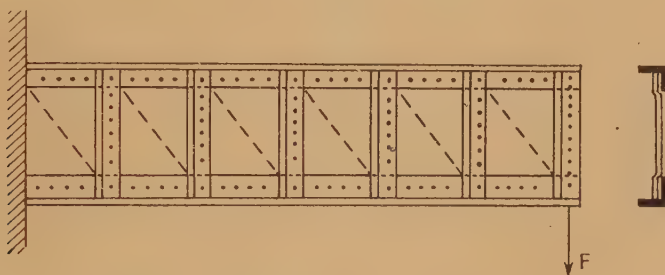
CHAPITRE II.

APPLICATIONS A QUELQUES CAS CONCRETS.

I. — CHAMP DE TENSIONS DIAGONALES DANS UNE TÔLE MINCE.

Si nous considérons une tôle mince travaillant au cisaillement, par exemple une âme de longeron d'aile d'avion, on constate que sous un faible effort la tôle se plisse tout en continuant à travailler, de telle sorte que la charge produisant

Fig. 6.



la rupture est considérablement plus élevée que celle provoquant l'apparition des plissements. On dit que la tôle travaille en tension diagonale et ce phénomène a été découvert par Wagner.

Il est facile de mettre ce problème en équation. Lorsque dans une tôle il n'existe que du cisaillement pur, les tensions N_1 et N_3 sont nulles et l'équation (1) du chapitre précédent définissant les tensions principales se réduit à

$$N^2 = NT_2^2 = 0.$$

La tension normale au plan de la tôle est évidemment nulle et les deux autres ont pour valeur $\pm T_2$.

Si l'une est une contrainte de traction, l'autre est une contrainte de compression et c'est cette dernière qui provoque les plissements. Lorsque les plissements apparaissent, les contraintes N_1 et N_3 sont différentes de zéro, mais telles que la contrainte principale de compression est nulle. L'équation (1) prend alors la forme suivante

$$N^2 - N^2(N_1 + N_3) + N(N_1 N_3 - T_2^2) = 0.$$

On en tire

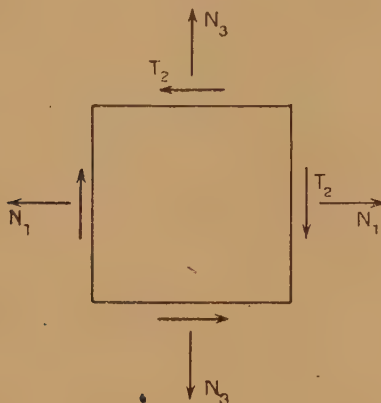
$$N = \frac{N_1 + N_3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(N_1 + N_3)^2 - 4(N_1 N_3 - T_2^2)};$$

l'une des tensions principales sera nulle si l'on a

$$(4) \quad N_1 N_3 = T_2^2$$

et l'autre tension aura pour valeur $N_1 + N_3$.

Fig. 7.



Les membrures (semelles et raidisseurs) sur lesquelles s'appuie la tôle sont sollicitées par les tensions N_1 , N_3 et T_2 ; si elles ont une grande rigidité, on déterminera les tensions N_1 et N_3 en écrivant que le potentiel interne de la tôle est minimum.

Or,

$$W = \frac{1}{2E} \iint \left[N_1^2 + N_3^2 - \frac{2}{m} N_1 N_3 + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) T_2^2 \right] d\omega.$$

T_2 ayant une valeur donnée constante, on est ramené à rechercher le minimum de

$$N_1^2 + N_3^2 - \frac{2}{m} N_1 N_3,$$

c'est-à-dire en tenant compte de (4), de

$$\varphi = N_1^2 + \frac{T_2^4}{N_1^2}, \quad \frac{d\varphi}{dN_1} = 2N_1 - \frac{2T_2^4}{N_1^3} = 0,$$

d'où

$$N_1 = T_2 \quad \text{et, par suite,} \quad N_3 = T_2.$$

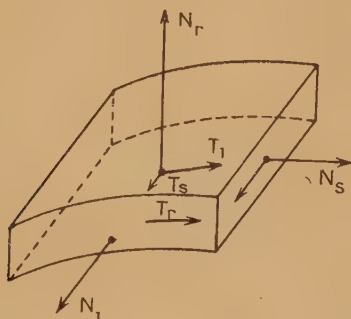
La tension principale positive est donc égale à $2T_2$. Les relations (IV) montrent que la direction de cette tension fait un angle de 45° avec la direction de l'effort tranchant T_2 . Mais pratiquement le problème est plus complexe. Les

membrures ne sont en effet suffisamment rigides que si elles sont soutenues par des raidisseurs peu espacés. Ces raidisseurs étant en fait rivés sur la tôle, il en résulte qu'une certaine largeur de tôle travaille comme le raidisseur, c'est-à-dire en compression. Nous nous bornons à signaler ce fait, car pousser le calcul plus loin serait sortir du cadre de notre étude.

II. — RÉSISTANCE DES ENVELOPPES CYLINDRIQUES.

Considérons une enveloppe cylindrique de longueur indéfinie, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 . La pression intérieure est ϖ_1 , la pression extérieure est ϖ_2 . L'axe du cylindre est parallèle à l'axe des x et nous prenons

Fig. 8.



comme variables le rayon r et l'arc s . Par raison de symétrie, les tensions ne dépendent pas de l'arc s . Dans ces conditions, le système des équations (V) s'écrit

$$(V') \quad \begin{cases} \frac{\partial N_r}{\partial x} + \frac{\partial T_s}{\partial r} + \frac{T_s}{r} = 0, \\ \frac{\partial T_r}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{2T_1}{r} = 0, \\ \frac{\partial T_s}{\partial x} + \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_s}{r} = 0. \end{cases}$$

Le cylindre étant indéfini, il est normal d'admettre que les tensions ne dépendent pas de x et l'on est ramené à l'étude d'un problème plan. Les équations ci-dessus se réduisent alors à

$$(5) \quad \frac{\partial T_s}{\partial r} + \frac{T_s}{r} = 0,$$

$$(6) \quad \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{2T_1}{r} = 0,$$

$$(7) \quad \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_s}{r} = 0.$$

L'intégration de l'équation (5) conduit à la relation $T_s r = \text{const.}$, pour $r = R_1$ ou R_2 ; $T_s = 0$, par suite, la constante d'intégration est nulle et T_s est identiquement nulle. L'équation (6) s'intègre également et donne

$$T_1 r^2 = \text{const.}$$

et pour la même raison, T_1 est identiquement nulle. De (7), on tire

$$N_s = N_r + r \frac{\partial N_r}{\partial r}.$$

Le potentiel interne est pour une longueur unité

$$W = \frac{1}{2E} \iint \left[N_1^2 + N_s^2 + N_r^2 - \frac{2}{m} (N_1 N_r + N_1 N_s + N_r N_s) + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) T_r^2 \right] r \, d\alpha \, dr;$$

N_1 ayant une valeur constante donnée, on est ramené à chercher le minimum de

$$\iint \left[N_s^2 + N_r^2 - \frac{2}{m} (N_1 N_r + \dots) + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) T_r^2 \right] r \, d\alpha \, dr,$$

c'est-à-dire en remplaçant N_s par sa valeur

$$\iint \left[\left(N_r + r \frac{\partial N_r}{\partial r} \right)^2 + N_r^2 - \frac{2}{m} \left(N_r + r \frac{\partial N_r}{\partial r} \right) (N_1 + N_r) - \frac{2}{m} N_1 N_r + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) T_r^2 \right] r \, d\alpha \, dr,$$

expression de la forme

$$\iint \varphi \left(N_r \frac{\partial N_r}{\partial r} T_r \right) d\alpha \, dr.$$

On doit avoir

$$(8) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N_r} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial \left(\frac{\partial N_r}{\partial r} \right)} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial T_r} = 0;$$

cette dernière condition montre que l'on doit encore avoir $T_r = 0$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N_r} = \left[2 \left(N_r + r \frac{\partial N_r}{\partial r} \right) + 2 N_r - \frac{2}{m} (N_1 + N_r) - \frac{2}{m} \left(N_r + r \frac{\partial N_r}{\partial r} \right) - \frac{2}{m} N_1 \right] r$$

$$= 4 \left(1 - \frac{1}{m} \right) r N_r + 2 \left(1 - \frac{1}{m} \right) r^2 \frac{\partial N_r}{\partial r} - \frac{4}{m} r N_1,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \left(\frac{\partial N_r}{\partial r} \right)} = \left[2 r \left(N_r + r \frac{\partial N_r}{\partial r} \right) - \frac{2}{m} r (N_1 + N_r) \right] r = 2 \left(1 - \frac{1}{m} \right) r^2 N_r - \frac{2}{m} r^2 N_1 + 2 r^3 \frac{\partial N_r}{\partial r}.$$

L'équation (8) se réduira après simplifications à

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(2 r^3 \frac{\partial N_r}{\partial r} \right) = 0,$$

par suite,

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} = \frac{2C}{r^3} \quad \text{et} \quad N_r = -\frac{C}{r^2} + A.$$

Les constantes d'intégration sont déterminées par les conditions aux limites

$$\begin{aligned} -\varpi_1 &= -\frac{C}{R_1^2} + A, & -\varpi_2 &= -\frac{C}{R_2^2} + A, \\ C &= \frac{\varpi_1 - \varpi_2}{R_2^2 - R_1^2} R_1^2 R_2^2, & A &= \frac{\varpi_1 R_1^2 - \varpi_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{(\varpi_1 - \varpi_2) R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \varpi_1, \\ N_s &= N_r + r \frac{\partial N_r}{\partial r} = N_r + \frac{2C}{r^2} = \frac{C}{r^2} + A = (\varpi_1 - \varpi_2) \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{R_2^2 + r^2}{r^2} - \varpi_2. \end{aligned}$$

III. — CALCUL DES FATIGUES DANS LES PIÈCES COURBES.

Considérons une pièce courbe dont les fibres extérieures sont parallèles, et soit AB une section droite de cette pièce; soit G le centre de gravité de cette section. Les forces extérieures situées à droite de la section AB, réduites en G sont équivalentes à un moment M, un effort normal N et un effort tranchant T. Les tensions normales h devant être équivalentes aux forces extérieures, on doit avoir

$$(9) \quad \iint_{\Omega} n \, d\omega = N,$$

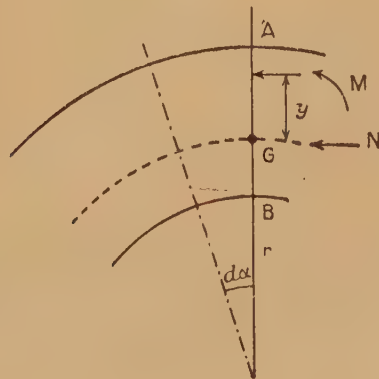
$$(10) \quad \iint_{\Omega} n y \, d\omega = M.$$

Dans l'expression du potentiel interne de toute la poutre, intervient le terme suivant

$$\frac{1}{2E} \iiint_V n^2 \, d\tau = \frac{1}{2E} \iiint_V n^2 (y + r) \, d\alpha \, d\omega,$$

en désignant par r le rayon de courbure de la fibre passant par le centre de

Fig. 9.



gravité, par y la distance d'une fibre quelconque au centre de gravité et $d\alpha$ l'angle que font entre elles deux sections infiniment voisines.

Si l'on considère dans l'expression du potentiel interne le terme ci-dessus comme prépondérant, on aura une valeur approchée de ces tensions en recherchant le minimum de

$$\iiint_V n^2 (y+r) dx d\omega,$$

étant entendu que n doit vérifier les équations (9) et (10).

On doit donc considérer l'expression

$$\varphi = n^2 (y+r) - 2\lambda n - 2\mu n y,$$

λ et μ étant des quantités indépendantes de y , et écrire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \text{c'est-à-dire } n(y+r) - \lambda - \mu y = 0,$$

d'où

$$n = \frac{\lambda + \mu y}{y+r}.$$

Les coefficients λ et μ sont déterminés par les relations (9) et (10)

$$N = \iint_{\Omega} \frac{\lambda + \mu y}{y+r} d\omega = \lambda \iint_{\Omega} \frac{d\omega}{y+r} + \mu \iint_{\Omega} \frac{y}{y+r} d\omega,$$

$$M = \iint_{\Omega} \frac{\lambda + \mu y}{y+r} y d\omega = \lambda \iint_{\Omega} \frac{y d\omega}{y+r} + \mu \iint_{\Omega} \frac{y^2 d\omega}{y+r}.$$

Toutes ces intégrales peuvent se calculer à partir de l'une d'entre elles $\iint_{\Omega} \frac{d\omega}{y+r}$, que nous supposons égale à A et de la surface de la section Ω .

$$\iint_{\Omega} \frac{y}{y+r} d\omega = \Omega - rA,$$

$$\iint_{\Omega} \frac{y^2 d\omega}{y+r} = \iint_{\Omega} \frac{y(y+r) - ry}{y+r} d\omega = \iint_{\Omega} y d\omega - r \iint_{\Omega} \frac{y d\omega}{y+r} = -r(\Omega - rA),$$

puisque y est comptée à partir du centre de gravité.

Nous avons donc

$$N = \lambda A + \mu(\Omega - rA), \quad M = \lambda(\Omega - rA) - \mu r(\Omega - rA).$$

Il en résulte

$$\lambda = \frac{N_r}{\Omega} + \frac{M}{\Omega}, \quad \mu = \frac{N}{\Omega} - \frac{MA}{\Omega(\Omega - rA)}.$$

Lorsque les forces extérieures se réduisent au moment fléchissant M , la valeur de y pour laquelle la tension n s'annule définit la fibre neutre de la pièce courbe. Soit e l'excentricité de la fibre neutre (en valeur absolue). On a

$$e = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{pour } N = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{Ar - \Omega}{A} \quad \text{et inversement} \quad A = \frac{\Omega}{r - e}.$$

On peut alors écrire dans le cas général

$$n = \frac{N}{\Omega} + M \left(1 + \frac{y}{e} \right) \frac{1}{\Omega(y+r)}$$

et le potentiel interne calculé à partir des forces normales est

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2E} \iiint_V n^2 (y+r) dx d\omega = \frac{1}{2E} \iiint_V \frac{(\lambda + \mu y)^2}{y+r} dx d\omega \\ &= \frac{1}{2E} \left[\lambda^2 \iiint_V \frac{dx d\omega}{y+r} + 2\lambda\mu \iiint_V \frac{y dx d\omega}{y+r} + \mu^2 \iiint_V \frac{y^2 dx d\omega}{y+r} \right], \end{aligned}$$

expression qui finalement se réduit à

$$W = \frac{1}{2E} \iiint_V \left(\frac{M^2}{\Omega r e} + \frac{2MN}{\Omega r} + \frac{N^2}{\Omega} \right) r dx d\omega.$$

Nous signalons que si la réduction des forces était faite non plus au centre de gravité mais sur l'axe neutre, on trouverait la même expression avec en moins le terme rectangle qui disparaît. On retrouve bien les résultats de la théorie classique, ce qui montre que l'hypothèse de Bernouilli sur la planéité des sections revient à admettre que le travail des forces tangentielles et des forces normales aux fibres de la pièce est négligeable.

IV. — RÉSISTANCE DES PLAQUES CIRCULAIRES.

Nous allons examiner le cas de chargement uniforme et nous supposons l'axe des x normal à la plaque. Les tensions ne dépendant pas de l'arc s , nous aurons comme conditions d'équilibre les relations V'. Pour des raisons de symétrie $T_r = 0$ et il en résulte $T_t = 0$.

Les équations V' se réduisent alors à

$$(11) \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_s}{\partial r} + \frac{T_s}{r} = 0,$$

$$(12) \quad \frac{\partial T_s}{\partial x} + \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_s}{r} = 0.$$

Si nous considérons un secteur circulaire de rayon r , la charge qu'il supporte a pour valeur $p \frac{r^2}{2} d\alpha$. Cette charge est équilibrée par les tensions T_s . On a donc, en désignant par e l'épaisseur de la plaque,

$$r d\alpha \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} T_s dx = p \frac{r^2}{2} d\alpha.$$

En intégrant par parties, on peut écrire

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} T_s dx = \left[x T_s \right]_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} - \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} x \frac{\partial T_s}{\partial x} dx = - \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} x \frac{\partial T_s}{\partial x} dx,$$

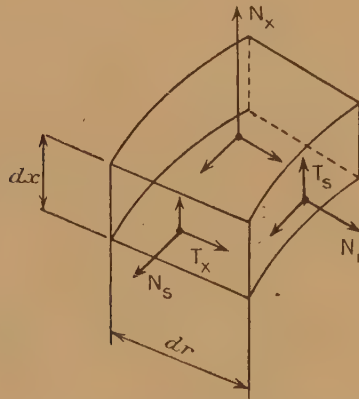
car $T_s = 0$ sur les faces de la plaque. On doit donc avoir

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} x \frac{\partial T_s}{\partial x} dx = p \frac{r}{2}$$

et en tenant compte de l'équation (12)

$$(13) \quad \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} x \left[\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_s}{r} \right] dx = p \frac{r}{2}.$$

Fig. 10.



La tension N_t sera toujours faible puisqu'elle est nulle sur l'une des faces de la plaque et égale à la pression sur l'autre face, et l'on sait que les tensions intérieures sont considérablement plus grandes que les forces de pression couramment réalisées. Si donc on élimine dans l'expression du potentiel interne de la plaque les termes contenant N_t , si, d'autre part, on néglige les termes relatifs aux tensions tangentiellles, on aura pour expression réduite de W

$$W = \frac{2\pi}{2E} \iint \left(N_r^2 + N_s^2 - \frac{2}{m} N_r N_s \right) r dr dx.$$

En désignant par λ une fonction indépendante de x , considérons l'expression

$$\begin{aligned} \Phi &= \left(N_r^2 + N_s^2 - \frac{2}{m} N_r N_s \right) r + 2\lambda x \left[\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_s}{r} \right], \\ \frac{\partial \Phi}{\partial N_r} &= \left(2 N_r - \frac{2}{m} N_s \right) r + 2\lambda \frac{x}{r}, & \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial N_r}{\partial r} \right)} &= 2\lambda x, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial N_s} &= \left(2 N_s - \frac{2}{m} N_r \right) r - 2\lambda \frac{x}{r}. \end{aligned}$$

Les fonctions N_r et N_s qui rendent minimum l'expression W doivent vérifier les deux relations

$$\begin{aligned} \left(2N_r - \frac{2}{m}N_s\right)r + 2\lambda\frac{x}{r} - 2x\frac{\partial\lambda}{\partial r} &= 0, \\ \left(2N_s - \frac{2}{m}N_r\right)r - 2\lambda\frac{x}{r} &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} N_r - \frac{1}{m}N_s &= \frac{x}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r} - \lambda\frac{x}{r^2} = x\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda}{r}\right), \\ N_s - \frac{1}{m}N_r &= \lambda\frac{x}{r^2}. \end{aligned}$$

Si donc on pose $\frac{\lambda}{r} = \varphi$, les équations ci-dessus s'écrivent

$$\begin{aligned} N_r - \frac{1}{m}N_s &= x\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \\ N_s - \frac{1}{m}N_r &= x\frac{\varphi}{r}, \end{aligned}$$

on en tire

$$(15) \quad N_r = \frac{mx}{m^2-1}\left(m\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r}\right),$$

$$(16) \quad N_s = \frac{mx}{m^2-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + m\frac{\varphi}{r}\right).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial r} &= \frac{mx}{m^2-1}\left[m\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right], \\ \frac{N_r - N_s}{r} &= \frac{mx}{m^2-1}\left[m\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - m\frac{\varphi}{r^2}\right], \\ \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_s}{r} &= \frac{mx}{m^2-1}\left[m\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + m\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - m\frac{\varphi}{r^2}\right]. \end{aligned}$$

L'équation (13) s'écrit donc

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{m^2 x^2}{m^2-1} \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\varphi}{r^2} \right] dx = \frac{pr}{2},$$

c'est-à-dire

$$(17) \quad r^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + r \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \varphi = \frac{6(m^2-1)}{e^3 m^2} pr^2.$$

L'intégrale générale de l'équation sans second membre est

$$\varphi = Ar + \frac{B}{r};$$

une intégrale particulière est $\frac{6(m^2-1)}{8e^3 m^2} pr^3$. L'intégrale générale de l'équation (17) est donc

$$\varphi = Ar + \frac{B}{r} + \frac{6(m^2-1)}{8e^3 m^2} pr^3.$$

Les équations (15) et (16) montrent que B doit être nul, sinon, au centre de la plaque, les tensions atteindraient des valeurs infinies.

On a donc

$$\varphi = Ar + \frac{3(m^2-1)}{4e^3m^2}pr^3, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = A + \frac{9}{4} \frac{(m^2-1)}{e^3m^2}pr^2.$$

Les expressions (15) et (16) permettent de calculer N_r et N_s .

$$(18) \quad N_r = \frac{mx}{m^2-1} \left[A(m+1) + \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{e^3m^2} (3m+1)pr^2 \right] = \frac{Amx}{m-1} + \frac{3}{4} \frac{(3m+1)x}{e^3m} pr^2,$$

$$(19) \quad N_s = \frac{mx}{m^2-1} \left[A(m+1) + \frac{3}{4} \frac{m^2-1}{e^3m^2} (m+3)pr^2 \right] = \frac{Amx}{m-1} + \frac{3}{4} \frac{(m+3)x}{e^3m} pr^2.$$

Les tensions dans la plaque sont ainsi exprimées en fonction d'un coefficient A qui, comme nous allons le voir, dépend de la nature des appuis. Nous allons examiner successivement le cas de la plaque appuyée et de la plaque encastree.

a. Cas de la plaque appuyée. — A la périphérie $N_r = 0$, c'est-à-dire que pour $r = R$, on a

$$A \frac{m}{m-1} + \frac{3}{4} \frac{3m+1}{e^3m} pR^2 = 0,$$

d'où

$$A = - \frac{3}{4} \frac{(m-1)(3m+1)}{e^3m^2} pR^2;$$

alors

$$N_r = - \frac{3}{4} \frac{3m+1}{e^3m} px(R^2 - r^2)$$

et

$$N_s = - \frac{3}{4} \frac{px}{e^3m} [(3m+1)R^2 - (m+3)r^2].$$

b. Cas de la plaque encastree. — Le degré d'encastrement est défini par la rigidité de l'appui, un encastrement parfait correspond à une rigidité infinie ou encore à un travail de déformation nul. Dans ce cas le coefficient A est tel que le potentiel interne de la plaque est minimum,

$$W = \frac{2\pi}{2E} \iint \left(N_r^2 + N_s^2 - \frac{2}{m} N_r N_s \right) r dr dx.$$

Nous devons donc avoir

$$\frac{\partial W}{\partial A} = 0;$$

or

$$\frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial A} = \frac{2\pi}{2E} \iint \left[\left(N_r - \frac{1}{m} N_s \right) \frac{\partial N_r}{\partial A} + \left(N_s - \frac{1}{m} N_r \right) \frac{\partial N_s}{\partial A} \right] r dr dx,$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial A} = \frac{\partial N_s}{\partial A} = \frac{mx}{m-1};$$

alors

$$\frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial A} = \frac{\pi}{E} \iint (N_r + N_s) \left(1 - \frac{1}{m} \right) \frac{mx}{m-1} r dx dr.$$

Cette expression sera nulle en même temps que $\int_0^R (N_r + N_s) r dr$, donc, d'après (15) et (16), en même temps que $\int_0^R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r} \right) r dr$, d'où

$$0 = \int_0^R \frac{d(\varphi r)}{dr} = [\varphi r]_0^R = AR^2 + \frac{3(m^2 - 1)}{4e^3 m^2} p R^4$$

et

$$A = -\frac{3}{4} \frac{m^2 - 1}{e^3 m^2} p R^2,$$

et l'on en déduit au moyen des relations (18) et (19) les valeurs de N_r et N_s .



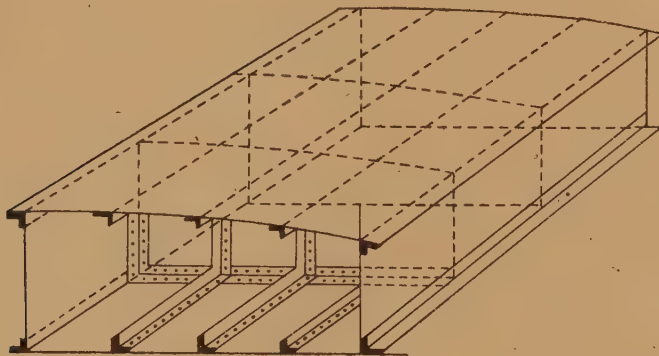
CHAPITRE III.

APPLICATION AU CALCUL DES COQUES.

I. — GÉNÉRALITÉS.

Nous désignerons par *coque* une surface matérialisée par un revêtement mince raidi par des éléments longitudinaux appelés *lisses* et par des éléments transversaux dénommés *couples* ou *cadres*. A une telle surface, on peut appliquer des efforts de traction ou compression, de flexion et de torsion. Le rôle des lisses est d'absorber les efforts normaux. Celui des cadres est double : d'une part ils diffusent les efforts tranchants dans le revêtement, et en outre ils assurent la forme de la surface en maintenant les lisses et en les empêchant de flamber sous l'action des charges de compression.

Fig. II.



Le calcul d'une coque, comme en général tous les problèmes de résistance des matériaux, comprend deux parties distinctes. Tout d'abord la recherche des forces intérieures équilibrant un ensemble de forces extérieures données; ensuite l'étude de la stabilité des différents éléments structuraux sous l'action des charges précédentes. Nous laisserons de côté cette deuxième partie de l'étude et ne nous occuperons que de la répartition des tensions qui, seule, se rapporte à notre sujet.

Nous assimilerons tout d'abord la coque à une enveloppe cylindrique d'épaisseur e suffisamment forte pour que les tensions normales ne s'accompagnent pas de phénomènes de flambage, et suffisamment faible d'autre part pour que

les efforts transversaux soient tangents au contour. Considérons en effet le système des équations V qui exprime l'équilibre d'un élément infiniment petit

$$(V) \quad \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_r}{\partial s} + \frac{\partial T_s}{\partial r} + \frac{T_s}{r} = 0, \\ \frac{\partial T_r}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{2T_1}{r} = 0, \\ \frac{\partial T_s}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_s}{r} = 0. \end{cases}$$

Les forces T_r , T_s et N_r sont nulles sur les faces externes et internes du revêtement. Si l'épaisseur de ce dernier est suffisamment faible, on peut admettre que ces tensions sont encore nulles à l'intérieur de la tôle. Les équations V se réduisent alors à

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_r}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial T_r}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} = 0, \quad \frac{N_s}{r} = 0.$$

Si le rayon de courbure r n'est pas infini, $N_s = 0$ et par suite

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_r}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial T_r}{\partial x} = 0.$$

Au lieu de considérer des tensions par unité de surface, on peut définir des tensions linéaires et poser en désignant par ε l'épaisseur du revêtement

$$n = N_1 \varepsilon, \quad t = T_r \varepsilon,$$

et les équations précédentes deviendront

$$\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

à condition d'admettre de faibles variations de ε , de telle sorte que l'on puisse négliger $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varepsilon}{\partial s}$.

Ces relations montrent que t est indépendant de x et que l'on a $\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0$; par suite n est une fonction linéaire de x . Mais ces résultats ne sont valables qu'entre deux cadres. De part et d'autre d'un cadre, les efforts tangentiels peuvent varier. Si l'effort tangentiel est t_1 d'un côté d'un cadre et t_2 de l'autre côté, c'est que le cadre a introduit un effort X tel que

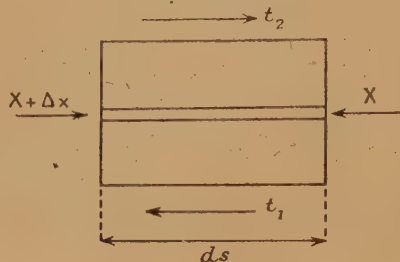
$$t_1 - t_2 = \frac{\Delta X}{\Delta s}.$$

Le potentiel interne de la tôle entre deux cadres a pour valeur

$$W = \frac{1}{2E} \iint \left[N_1^2 + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) T_r^2 \right] \varepsilon dx ds = \iint \left[n^2 + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) t^2 \right] dx \frac{ds}{\varepsilon}.$$

Comme n varie linéairement avec x , le terme prépondérant dans l'expression du potentiel sera donné soit par les forces normales, soit par les faisons tangentielles selon que x variera entre des limites étendues ou étroites.

Fig. 12.

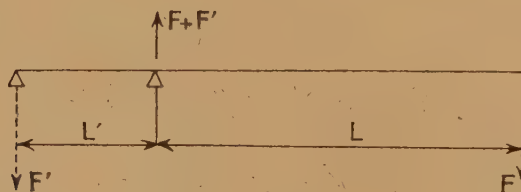


Nous allons examiner précisément dans ce qui suit l'influence de la longueur d'une poutre sur appuis et chargée à ses extrémités, en nous plaçant dans le cas idéal d'une poutre ne comportant aucun cadre entre l'extrémité et l'appui.

II. — INFLUENCE DE LA LONGUEUR D'UNE POUTRE SUR LA RÉPARTITION DES TENSIONS.

Nous rappelons les hypothèses déjà faites à savoir que la poutre est cylindrique, que son épaisseur est faible et varie peu, et nous nous placerons dans le cas où les forces extérieures se réduisent à une force unique F appliquée à l'extrémité de la poutre. La longueur de la partie libre est L et la distance entre

Fig. 13.



appuis est L' . Dans ces conditions, les efforts tangentiels ne dépendent que de l'arc s et les efforts normaux n variant linéairement avec x peuvent s'écrire

$$n = n_1 x + \varphi,$$

en désignant par n_1 et φ deux fonctions de s .

a. Efforts entre extrémité et appui. — La fonction φ est identiquement nulle, puisque l'on suppose qu'à l'extrémité de la poutre les efforts extérieurs se

réduisent à un effort tranchant F . Pour cette partie de la poutre, le potentiel interne est

$$W = \frac{1}{2E} \int \left[n_1^2 x^2 + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) t^2 \right] \frac{ds}{\varepsilon} = \frac{1}{2E} \int \left[n_1^2 \frac{L^3}{3} + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) t^2 L \right] \frac{ds}{\varepsilon}$$

et en remplaçant n_1 par sa valeur $-\frac{\partial t}{\partial s}$, on peut écrire

$$W = \frac{1}{2E} \int \left[\left(\frac{\partial t}{\partial s} \right)^2 \frac{L^3}{3} + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) t^2 L \right] \frac{ds}{\varepsilon}.$$

b. Efforts entre appuis. — L'effort tranchant qui règne entre les appuis est

$$F' = F \frac{L}{L'}.$$

Il donne naissance à un effort tangentiel $t' = t \frac{L}{L'}$ et à un effort normal défini comme précédemment par

$$n' = n_1 x = - \frac{\partial t'}{\partial s} x = - \frac{L}{L'} \frac{\partial t}{\partial s} x$$

et le potentiel interne entre appuis a pour valeur

$$\begin{aligned} W' &= \frac{1}{2E} \int \left[\frac{L^2}{L'^2} \left(\frac{\partial t}{\partial s} \right)^2 \frac{L'^3}{3} + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{L^2}{L'^2} t'^2 L' \right] \frac{ds}{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2E} \int \left[\frac{L^2 L'}{3} \left(\frac{\partial t}{\partial s} \right)^2 + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{L^2}{L'} t^2 \right] \frac{ds}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

c. Recherche du minimum du potentiel interne. — Pour l'ensemble des deux travées, le potentiel interne est

$$W + W' = \frac{1}{2E} \int \left[\left(\frac{\partial t}{\partial s} \right)^2 \frac{L^2}{3} (L + L') + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) t^2 L \frac{L + L'}{L'} \right] \frac{ds}{\varepsilon}.$$

Si l'on désigne par F_y et F_z les composantes de la force F sur les axes Oy , Oz (situés dans un plan normal à l'axe de la poutre) et si M_x est le moment de cette force par rapport à l'axe Ox , on a les équations de conditions

$$\int_0^l t \frac{dy}{ds} ds = F_y, \quad \int_0^l t \frac{dz}{ds} ds = F_z, \quad \int_0^l t \left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} \right) ds = M_x.$$

Considérons alors l'expression

$$\Phi = \left[\left(\frac{\partial t}{\partial s} \right)^2 \frac{L^2}{3} + 2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) t^2 \frac{L}{L'} \right] \frac{1}{\varepsilon} + \lambda t \frac{dy}{ds} + \mu t \frac{dz}{ds} + \nu t p,$$

en posant $p = \gamma \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds}$ et en désignant par λ, μ, ν , trois constantes

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 4 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{L}{L'} \frac{t}{\varepsilon} + \lambda \frac{dy}{ds} + \mu \frac{dz}{ds} + \nu p,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial t}{\partial s} \right)} = 2 \frac{L^2}{3} \left(\frac{\partial t}{\partial s} \right) \frac{1}{\varepsilon},$$

l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction t est alors la suivante

$$(20) \quad 4 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{L}{L'} \frac{t}{\varepsilon} + \lambda \frac{dy}{ds} + \mu \frac{dz}{ds} + \nu p - 2 \frac{L^2}{3} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial t}{\partial s} \frac{1}{\varepsilon} \right] = 0;$$

comme nous avons supposé que ε variait peu avec s , on peut écrire

$$4 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{L}{L'} \frac{t}{\varepsilon} + \lambda \frac{dy}{ds} + \mu \frac{dz}{ds} + \nu p - 2 \frac{L^2}{3} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 t}{\partial s^2} = 0;$$

c'est une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 t}{\partial s^2} - at = \varphi(s),$$

en posant

$$a = 6 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{1}{LL'} \quad \text{et} \quad \varphi(s) = \frac{3}{2L^2} \left[\lambda \frac{dy}{ds} + \mu \frac{dz}{ds} + \nu p \right].$$

L'intégrale de l'équation sans second membre est

$$t = C_1 e^{\sqrt{a}s} + C_2 e^{-\sqrt{a}s}.$$

Par la méthode de variation des constantes, on trouve l'intégrale particulière suivante

$$t = \frac{1}{2\sqrt{a}} e^{\sqrt{a}s} \int_0^s e^{-\sqrt{a}u} \varphi(u) du - \frac{1}{2\sqrt{a}} e^{-\sqrt{a}s} \int_0^s e^{\sqrt{a}u} \varphi(u) du.$$

La solution générale de l'équation (20) est donc

$$t = C_1 e^{\sqrt{a}s} + C_2 e^{-\sqrt{a}s} + e^{\sqrt{a}s} \int_0^s e^{-\sqrt{a}u} \left(A \frac{dy}{ds} + B \frac{dz}{ds} + Cp \right) \varepsilon du \\ + e^{-\sqrt{a}s} \int_0^s e^{\sqrt{a}u} \left(A \frac{dy}{ds} + B \frac{dz}{ds} + Cp \right) \varepsilon du.$$

d. Détermination des constantes d'intégration. — Les constantes C_1 et C_2 seront déterminées par les conditions aux limites. Si le contour est fermé, on écrira que pour $s=0$ et pour $s=l$, t et $\frac{dt}{ds}$ ont les mêmes valeurs. On aura un système de deux équations qui permettront de calculer C_1 et C_2 en fonction des

coefficients A, B et C, lesquels seront déterminés au moyen des équations de projection et de moment. Si le contour est ouvert, on devra écrire que, pour $s=0$ et pour $s=l$, $t=0$ ce qui permettra également de calculer C_1 et C_2 en fonction de A, B, C.

III. — CAS DE LA POUTRE ILLIMITÉE.

Lorsque L augmente indéfiniment, le travail de cisaillement devient négligeable devant le travail de déformation des forces normales de sorte que l'on sera ramené à rechercher le minimum de l'expression

$$\int_0^l \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \frac{ds}{\varepsilon}$$

en tenant compte des équations de projection et de moment, et l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction t sera

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{dt}{ds} \right) - A \frac{dy}{ds} - B \frac{dz}{ds} - Cp = 0;$$

par intégration, on a

$$\frac{dt}{ds} = A \varepsilon y + B \varepsilon z + 2C \varepsilon \Omega + D \varepsilon$$

et

$$(21) \quad t = A \int_0^s \varepsilon y ds + B \int_0^s \varepsilon z ds + 2C \int_0^s \varepsilon \Omega ds + D \int_0^s \varepsilon ds + F,$$

en désignant par Ω l'aire balayée par le rayon vecteur. Les constantes A, B, C, D, F se calculent au moyen des équations de projection et de moment et des conditions aux limites. Nous allons distinguer deux cas, celui du contour fermé et celui du contour ouvert.

a. Cas d'un contour fermé. — Pour $s=0$ et pour $s=l$, t doit avoir la même valeur ainsi que $\frac{dt}{ds}$. Pour $s=l$, on a

$$t = A \int_0^l \varepsilon y ds + B \int_0^l \varepsilon z ds + 2C \int_0^l \varepsilon \Omega ds + D \int_0^l \varepsilon ds + F,$$

c'est-à-dire

$$2C \int_0^l \varepsilon \Omega ds + D \int_0^l \varepsilon ds + F,$$

en choisissant des axes de référence passant par le centre de gravité du contour. Pour $s=0$, t se réduit à F. Il en résulte la relation

$$(22) \quad 2C \int_0^l \varepsilon \Omega ds + D \int_0^l \varepsilon ds = 0;$$

d'autre part,

$$\frac{dt}{ds} = A\varepsilon y + B\varepsilon z + 2C\varepsilon\Omega + D\varepsilon;$$

cette expression ne peut avoir la même valeur pour $s = 0$ et $s = l$ que si C est nul et ceci entraîne, d'après la relation (22), $D = 0$. On peut écrire dans ces conditions

$$t = A \int_0^s \varepsilon y \, ds + B \int_0^s \varepsilon z \, ds + F.$$

Considérons l'équation de projection

$$\int_0^l t \frac{dy}{ds} \, ds = F_y.$$

En intégrant par parties

$$\int_0^l t \frac{dy}{ds} \, ds = [ty]_0^l - \int_0^l y \frac{dt}{ds} \, ds = - \int_0^l (A\varepsilon y^2 + B\varepsilon yz) \, ds = F_y.$$

Si l'on choisit comme axes de coordonnées les axes principaux d'inertie

$$\int_0^l \varepsilon yz \, ds = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^l \varepsilon y^2 \, ds = I_z;$$

alors

$$A = -\frac{F_y}{I_z}; \quad \text{de même, on a} \quad B = -\frac{F_z}{I_y}.$$

On peut donc écrire

$$(23) \quad t = F - \frac{F_y}{I_z} \int_0^s \varepsilon y \, ds - \frac{F_z}{I_y} \int_0^s \varepsilon z \, ds,$$

ce qui montre que les efforts intérieurs sont distribués suivant la loi de Saint-Venant. La constante F se calcule à l'aide de la troisième équation d'équilibre

$$\int_0^l t \left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} \right) \, ds = M_x = \int_0^l 2t \frac{d\Omega}{ds} \, ds;$$

or

$$\int_0^l 2t \frac{d\Omega}{ds} \, ds = [2t\Omega]_0^l - 2 \int_0^l \Omega \frac{dt}{ds} \, ds,$$

donc

$$(24) \quad M_x = 2F\Omega_0 - 2A \int_0^l \Omega y \, ds - 2B \int_0^l \Omega z \, ds,$$

équation qui permet de calculer F .

L'équation (23) montre que pour une force extérieure donnée de composantes F_y , F_z les efforts de cisaillement sont définis à une constante près. Il existera une position de la force extérieure pour laquelle la déformation, c'est-

à-dire le potentiel interne, sera minimum. On dira dans ce cas que la force extérieure passe par le centre de torsion. Désignons par t_0 l'expression

$$t_0 = -\frac{F_y}{I_z} \int_0^s \varepsilon y ds - \frac{F_z}{I_y} \int_0^s \varepsilon z ds.$$

On pourra écrire

$$t = t_0 + F.$$

Le potentiel interne calculé à partir de t comporte deux termes; l'un dépend des forces normales et est proportionnel à $\left(\frac{dt}{ds}\right)^2$, l'autre est proportionnel à t^2 .

Le premier de ces termes ne contenant pas l'inconnue F , le second seul doit être considéré. Pour un élément de longueur unité sa valeur est W telle que

$$\begin{aligned} \frac{2E}{1 + \frac{1}{m}} W &= \int_0^l (t_0 + F)^2 \frac{ds}{\varepsilon} = \int_0^l t_0^2 \frac{ds}{\varepsilon} + 2F \int_0^l t_0 \frac{ds}{\varepsilon} + F^2 \int_0^l \frac{ds}{\varepsilon}, \\ \frac{2E}{1 + \frac{1}{m}} \frac{dW}{dF} &= 2 \int_0^l t_0 \frac{ds}{\varepsilon} + 2F \int_0^l \frac{ds}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Le potentiel interne est donc minimum pour

$$F = - \frac{\int_0^l t_0 \frac{ds}{\varepsilon}}{\int_0^l \frac{ds}{\varepsilon}}.$$

En donnant à F cette valeur dans l'expression (23) on obtient la distribution du cisaillement correspondant à un effort dont la ligne d'action passe par le centre de torsion.

Dans le cas où les composantes F_y, F_z sont nulles, et où les efforts extérieurs se réduisent à un moment de torsion A et B sont nuls, le cisaillement est constant tout le long du contour et sa valeur est donnée par l'équation (24) soit $\frac{M_x}{2\Omega_0}$; c'est la formule de M. Leduc. Le potentiel interne de la poutre, est dans ce cas

$$W_t = \frac{1}{2E} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{M_x^2}{4\Omega_0^2} \iint \frac{ds}{\varepsilon} dx.$$

La valeur de l'angle de torsion $d\theta$ correspondant à une longueur dx est donnée par l'expression $\frac{dW_t}{dM_x}$. On a donc

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_x}{E \frac{m}{m+1} \int \frac{ds}{\varepsilon}},$$

c'est la deuxième formule de M. Leduc.

b. *Cas d'un contour ouvert.* — Reprenons l'expression (21) qui donne en fonction de l'arc s la valeur de l'effort tranchant

$$(21) \quad t = A \int_0^s \varepsilon y \, ds + B \int_0^s \varepsilon z \, ds + 2C \int_0^s \varepsilon \Omega \, ds + D \int_0^s \varepsilon \, ds + F.$$

Les conditions aux limites sont les suivants

$$t = 0 \quad \text{pour } s = 0 \text{ et pour } s = l.$$

Il en résulte immédiatement $F = 0$ et si les axes de référence passent par le centre de gravité de la section, on aura

$$(25) \quad D = -C \frac{\int_0^l 2\varepsilon \Omega \, ds}{\int_0^l \varepsilon \, ds}.$$

Reste à déterminer les trois coefficients A , B , C au moyen des équations de projection et de moment

$$\begin{aligned} \int_0^l t \frac{dy}{ds} \, ds &= [ty]_0^l - \int_0^l y \frac{dt}{ds} \, ds = - \int_0^l y \frac{dt}{ds} \, ds = F_y, \\ \int_0^l t \frac{dz}{ds} \, ds &= [tz]_0^l - \int_0^l z \frac{dt}{ds} \, ds = - \int_0^l z \frac{dt}{ds} \, ds = F_z, \end{aligned}$$

si l'on remplace dans ces expressions $\frac{dt}{ds}$ par sa valeur et si les axes choisis sont les axes principaux d'inertie, les équations ci-dessus se ramènent à

$$(26) \quad A I_x + 2C \int_0^l \varepsilon \Omega y \, ds = F_y,$$

$$(27) \quad B I_y + 2C \int_0^l \varepsilon \Omega z \, ds = F_z.$$

A et B s'expriment donc en fonction de C , et l'équation de moment finalement fournira l'équation permettant le calcul de C . Lorsque C est nul A et B ne dépendent que de F_y et F_z , mais il n'est pas évident que dans ce cas la force extérieure passe par le centre de torsion. Nous allons voir qu'il en est ainsi en montrant que le potentiel interne (de la poutre illimitée) est minimum pour $C = 0$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2E} \int_0^l \left(\frac{\partial t}{\partial s} \right)^2 \frac{ds}{\varepsilon}, \\ \left(\frac{\partial t}{\partial s} \right)^2 &= (A \varepsilon y + B \varepsilon z)^2 + 2(A \varepsilon y + B \varepsilon z)(2C \varepsilon \Omega + D \varepsilon) + (2C \varepsilon \Omega + D \varepsilon)^2, \\ \int_0^l \left(\frac{\partial t}{\partial s} \right)^2 \frac{ds}{\varepsilon} &= \int_0^l (A y + B z)^2 \varepsilon \, ds + 2 \int_0^l (A y + B z)(2C \Omega + D) \varepsilon \, ds + \int_0^l (2C \Omega + D)^2 \varepsilon \, ds, \end{aligned}$$

les axes étant les axes principaux d'inertie, cette expression se réduit à

$$A^2 I_z + B^2 I_y + 4AC \int_0^l y \Omega \varepsilon ds + 4BC \int_0^l \Omega z \varepsilon ds + \int_0^l (2C\Omega + D)^2 \varepsilon ds.$$

En tenant compte de l'équation (26), on peut écrire

$$\begin{aligned} A^2 I_z + 4AC \int_0^l y \Omega \varepsilon ds &= A \left[A I_z + 4C \int_0^l y \Omega \varepsilon ds \right] \\ &= \left[\frac{F_y}{I_z} + \frac{2C}{I_z} \int_0^l \varepsilon \Omega y ds \right] \left[F_y + 2C \int_0^l \varepsilon \Omega y ds \right] = \frac{F_y^2}{I_z} - \frac{4C^2}{I_z} \left[\int_0^l y \Omega \varepsilon ds \right]^2. \end{aligned}$$

De même

$$B^2 I_y + 4BC \int_0^l \Omega z \varepsilon ds = \frac{F_z^2}{I_y} - \frac{4C^2}{I_y} \left[\int_0^l z \Omega \varepsilon ds \right]^2.$$

Ainsi

$$\int_0^l \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \varepsilon ds = \frac{F_y^2}{I_z} + \frac{F_z^2}{I_y} - \frac{4C^2}{I_z} \left[\int_0^l y \Omega \varepsilon ds \right]^2 - \frac{4C^2}{I_y} \left[\int_0^l z \Omega \varepsilon ds \right]^2 + \int_0^l (2C\Omega + D)^2 \varepsilon ds.$$

Comme D est proportionnel à C d'après la relation (25), l'expression ci-dessus est de la forme

$$\frac{F_y^2}{I_z} + \frac{F_z^2}{I_y} + KC^2$$

et est minimum lorsque C est nul.

Dans le cas où la section possède un axe de symétrie, l'expression (21) se simplifie un peu.

Supposons par exemple que oz soit un axe de symétrie et calculons la valeur de $\int_0^l \varepsilon \Omega z ds$.

Désignons par Ω_1 la valeur de Ω pour une valeur de s comprise entre 0 et $\frac{l}{2}$. On pourra écrire

$$\int_0^l \varepsilon \Omega z ds = \int_0^{\frac{l}{2}} \varepsilon \Omega_1 z ds + \int_{\frac{l}{2}}^l \varepsilon (\Omega_0 - \Omega_1) z ds$$

par suite de la symétrie

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \varepsilon \Omega_1 z ds = \int_{\frac{l}{2}}^l \varepsilon \Omega_1 z ds.$$

En conséquence

$$\int_0^l \varepsilon \Omega z ds = \Omega_0 \int_{\frac{l}{2}}^l \varepsilon z ds = 0 \quad \text{et} \quad B = \frac{F_z}{I_z},$$

si F_z est nul, il en est de même de B.

Le coefficient D se calcule aussi immédiatement.

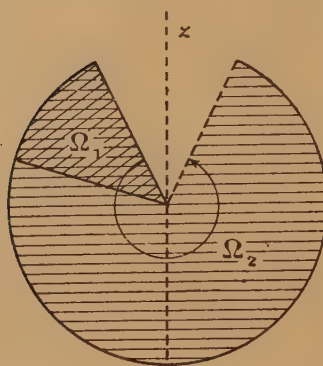
En effet

$$\int_0^l 2\varepsilon\Omega ds = \int_0^{\frac{l}{2}} 2\varepsilon\Omega_1 ds + \int_{\frac{l}{2}}^l 2(\Omega_0 - \Omega_1) ds = \int_{\frac{l}{2}}^l 2\varepsilon\Omega_0 ds,$$

c'est-à-dire

$$\Omega_0 \int_0^l \varepsilon ds \quad \text{et ainsi} \quad D = -C\Omega_0.$$

Fig. 14.



Nous donnons à titre d'exemple les caractéristiques d'un U d'épaisseur constante et le diagramme des efforts de cisaillement t correspondant à un moment de torsion M_x . La hauteur de l'U est h et sa largeur d'aile est a .

$$I_z = \frac{\varepsilon h^2}{2} \left(a + \frac{h}{6} \right), \quad Z_G = \frac{a^2}{2a + h}, \quad \Omega_0 = \frac{h}{2} (a + Y_G), \quad d = \frac{3a^2}{6a + h};$$

$$t = A \int_0^s \varepsilon z ds + C \int_0^s \varepsilon \Omega ds + D \int_0^s \varepsilon ds;$$

$$A = -C \left[\frac{a^2 h^2 \varepsilon}{4 I_z} + Z_G \right], \quad D = -C \frac{h}{2} (A + Z_G), \quad C = -\frac{12 M_t (6a + h)}{\varepsilon a^2 h^2 (3a + 2h)}.$$

Entre A_1 et B_1 , on a

$$\frac{t}{\varepsilon C} = \frac{h}{4} s^2 + \frac{ah}{2} \left[\frac{\varepsilon a h^2}{4 I_z} - 1 \right] s.$$

Entre B_1 et B_1' ,

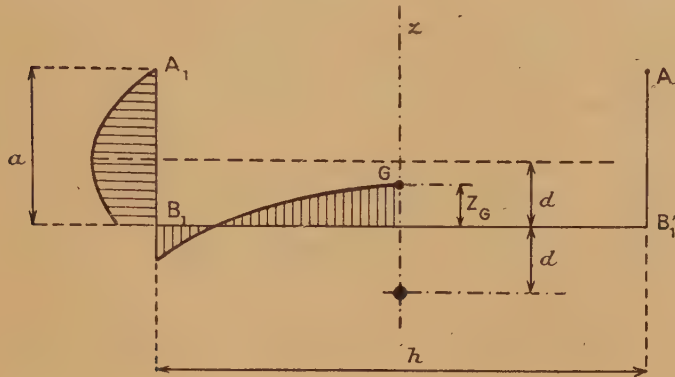
$$\frac{t}{\varepsilon C} = -\frac{ha^2}{4} - \frac{\varepsilon a^2 h^2}{8 I_z} (s - a)^2 + \frac{\varepsilon a^2 h^3}{8 I_z} s.$$

Entre A_1 et B_1 , $\frac{dt}{ds}$ s'annule pour $a - s = d = \frac{3a^2}{6a + h}$, c'est-à-dire pour $s = \frac{a(3a + h)}{6a + h}$ et la valeur correspondante de t est

$$t_m = \frac{3 M_t}{ah} \frac{(3a + h)^2}{(3a + 2h)(6a + h)}.$$

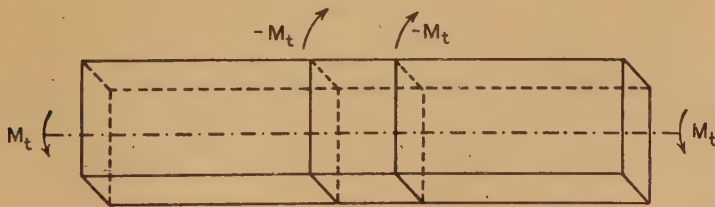
Dans ce qui précède nous avons supposé que les efforts extérieurs se réduisaient à une force unique et avons considéré le moment de cette force par rapport au centre de gravité du contour. Nous avons introduit le couple pur en donnant au moment de torsion une valeur finie et en faisant tendre la force vers zéro; en procédant de cette façon, nous avons admis implicitement une

Fig. 15.



répartition entre les appuis des couples équilibrateurs. Nos résultats seront valables dans le cas où la section terminale du caisson est encastree ou par exemple dans le cas d'une poutre symétrique par rapport à ses appuis et soumise à ses extrémités à des couples égaux et de même sens; c'est le cas d'une aile d'avion dont les flancs de fuselage constituent les appuis. Le cas d'un caisson en équilibre sous l'action de couples égaux et de sens contraires ne rentre pas dans les cas étudiés ci-dessus.

Fig. 16.



Nous signalerons enfin que pour la commodité de l'exposé, nous avons supposé que tout le revêtement d'épaisseur ϵ était susceptible de tenir des efforts de compression. En réalité les efforts normaux sont transmis par les lisses et une portion de tôle dite largeur travaillante au voisinage de ces lisses. Mais tous les résultats acquis subsistent et il suffit de remplacer ϵds par ω section de la lisse et de la tôle travaillante dans l'expression (21).

IV. — CAS DE LA POUTRE INFINIMENT COURTE.

Lorsque l'on fait tendre L vers zéro dans la relation (20), on voit que l'expression de t tend vers

$$t = A\varepsilon \frac{dy}{ds} + B\varepsilon \frac{dz}{ds} + C\varepsilon p$$

et les efforts de cisaillement ne sont pas du tout distribués comme le voudrait la théorie de Saint-Venant. Le calcul des constantes A , B , C s'effectue comme précédemment au moyen des équations de projections et de moment

$$\begin{aligned} \int_0^l t \frac{dy}{ds} ds &= A \int_0^l \varepsilon \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 ds + B \int_0^l \varepsilon \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} ds + C \int_0^l p \varepsilon \frac{dy}{ds} ds = F_y, \\ \int_0^l t \frac{dz}{ds} ds &= A \int_0^l \varepsilon \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} ds + B \int_0^l \varepsilon \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 ds + C \int_0^l p \varepsilon \frac{dz}{ds} ds = F_z, \\ \int_0^l t p ds &= A \int_0^l \varepsilon p \frac{dy}{ds} ds + B \int_0^l \varepsilon p \frac{dz}{ds} ds + C \int_0^l \varepsilon p^2 ds = M_x. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} \alpha' &= \int_0^l \varepsilon \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 ds, & \beta' &= \int_0^l \varepsilon \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} ds, & \gamma' &= \int_0^l p \varepsilon \frac{dy}{ds} ds; \\ \delta' &= \int_0^l \varepsilon \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 ds, & \eta' &= \int_0^l p \varepsilon \frac{dz}{ds} ds, & \rho' &= \int_0^l \varepsilon p^2 ds; \end{aligned}$$

les équations ci-dessus s'écrivent

$$(VI) \quad \begin{cases} A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = F_y, \\ A\beta' + B\delta' + C\eta' = F_z, \\ A\gamma' + B\eta' + C\rho' = M_x. \end{cases}$$

α' , δ' et ρ' sont des quantités toujours positives, mais nous allons montrer qu'il est possible de choisir les axes de référence de façon à annuler simultanément les coefficients β' , γ' et η' . Désignons par a et b les coordonnées de la nouvelle origine et par θ l'angle que font les nouveaux axes avec les anciens

$$Y = (y - a) \cos \theta + (z - b) \sin \theta,$$

$$Z = -(y - a) \sin \theta + (z - b) \cos \theta;$$

$$\frac{dY}{ds} = \cos \theta \frac{dy}{ds} + \sin \theta \frac{dz}{ds},$$

$$\frac{dZ}{ds} = -\sin \theta \frac{dy}{ds} + \cos \theta \frac{dz}{ds},$$

$$\frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} = -\sin \theta \cos \theta \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \sin \theta \cos \theta \left(\frac{dz}{ds} \right)^2;$$

donc

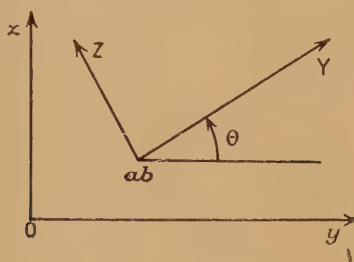
$$\int_0^l \varepsilon \frac{dY}{ds} \frac{dZ}{ds} ds = \frac{\sin 2\theta}{\varepsilon} \left[\int_0^l \varepsilon \left(\frac{dZ}{ds} \right)^2 ds - \int_0^l \varepsilon \left(\frac{dY}{ds} \right)^2 ds \right] + \cos 2\theta \int_0^l \varepsilon \frac{dY}{ds} ds,$$

d'où

$$\beta = \frac{\sin 2\theta}{2} (\delta' - \alpha') + \cos 2\theta \beta';$$

β s'annulera pour $\tan 2\theta = \frac{2\beta'}{\alpha' - \delta'}$.

Fig. 17.



De même, si l'on cherche à annuler $\int \varepsilon p \frac{dY}{ds} ds$ et $\int \varepsilon p \frac{dZ}{ds} ds$, on obtiendra deux équations du premier degré en a et b . Avec ces nouveaux axes de coordonnées, le calcul de A , B et C est immédiat

$$A = \frac{F_y}{\alpha}, \quad B = \frac{F_z}{\delta}, \quad C = \frac{M_x}{\rho}.$$

Quant au potentiel interne, il se calcule aisément

$$\frac{E}{1 + \frac{1}{m}} W = \int_0^l t^2 \frac{ds}{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad t = A \varepsilon \frac{dy}{ds} + B \varepsilon \frac{dz}{ds} + C \varepsilon p.$$

L'expression générale de $\frac{E}{1 + \frac{1}{m}} w$ est donc

$$\frac{E}{1 + \frac{1}{m}} W = \int_0^l [A^2 \alpha' + B^2 \delta' + C^2 \rho' + 2AB\beta' + 2AC\gamma' + 2BC\eta'] ds,$$

expression dans laquelle A , B , C satisfont aux équations (VI).

Ce système peut s'écrire encore, en multipliant les deux membres de la première équation par A , ceux de la deuxième par B , ceux de la troisième par C ,

$$\begin{aligned} A^2 \alpha' + AB\beta' + AC\gamma' &= AF_y, \\ AB\beta' + B^2 \delta' + BC\eta' &= BF_z, \\ AC\gamma' + BC\eta' + C^2 \rho' &= CM_x. \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre on trouve

$$\frac{E}{1 + \frac{1}{m}} W = A F_y + B F_z + C M_x.$$

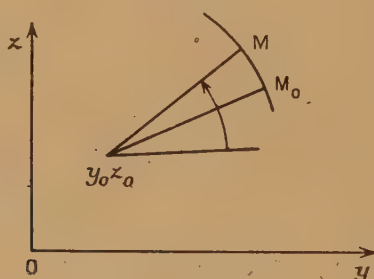
Si les axes de coordonnées sont ceux pour lesquels $\beta = \gamma = \eta = 0$

$$\frac{E}{1 + \frac{1}{m}} W = \frac{F_y^2}{\alpha} + \frac{F_z^2}{\beta} + \frac{M_x^2}{\rho}.$$

Si les forces F_y et F_z sont données, le potentiel interne aura sa plus petite valeur lorsque M_x sera égal à zéro, c'est-à-dire lorsque la résultante des forces considérées passera par l'origine. Cette origine est donc le centre de torsion.

Nous ferons remarquer que dans le cas où les forces extérieures se réduisent à un moment de torsion, la distribution des efforts de cisaillement sera celle de Saint-Venant si le produit εp est constant. Nous ajouterons enfin qu'il peut être commode d'introduire la valeur du rayon de courbure du contour dans l'expression des tensions de cisaillement.

Fig. 18.



Considérons sur le contour un point M. En ce point le rayon de courbure a pour valeur R_0 et les coordonnées du centre de courbure sont y_0, z_0 . Les coordonnées d'un point M voisin de M_0 sur le contour ont pour valeur

$$y = y_0 + R_0 \cos \varphi, \quad z = z_0 + R_0 \sin \varphi;$$

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{z - z_0}{R_0}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{y - y_0}{R_0}.$$

Comme

$$\frac{t}{\varepsilon} = A \frac{dy}{ds} + B \frac{dz}{ds} + C \left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} \right),$$

on peut écrire

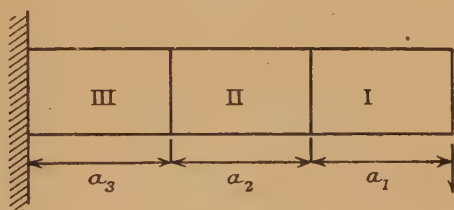
$$\frac{t}{\varepsilon} = -\frac{z - z_0}{R_0} (A - C z) + \frac{y - y_0}{R_0} (B + C y).$$

V. — CAS GÉNÉRAL.

Le problème que nous venons de traiter dans les paragraphes précédents ne se présente pratiquement pas car pour des raisons de stabilité, il est indispensable de placer des cadres à des écartements relativement faibles. Il nous a permis cependant de mettre en lumière l'influence de la longueur d'une poutre et surtout celle de la distance entre appuis. Nous avons vu, par des exemples numériques, qu'il fallait considérer le cas de poutres extrêmement courtes pour constater des écarts notables entre les efforts tranchants calculés au moyen de l'équation (20) et ceux donnés par la théorie de Saint-Venant. Dans le cas de l'aile d'avion chargée symétriquement, la travée comprise à l'intérieur du fuselage et dans laquelle les efforts tranchants sont nuls fait en sorte que même au voisinage des appuis les formules de la poutre illimitée sont pratiquement applicables. La détermination des tensions dans le cas de plusieurs cloisons est évidemment plus complexe, nous allons indiquer brièvement le processus du calcul.

Considérons par exemple trois nervures qui dans une poutre cylindrique encastrée définissent trois travées I, II, III, de longueurs a_1 , a_2 , a_3 . Dans

Fig. 19.



chacune d'elles les efforts tranchants sont t_1 , t_2 , t_3 pour une même charge supposée appliquée à l'extrémité libre de la poutre.

Les efforts normaux dans la première travée sont

$$-\frac{\partial t_1}{\partial s} x_1;$$

dans la deuxième

$$-\frac{\partial t_2}{\partial s} x_2 + \sigma_1 \quad \text{avec} \quad \sigma_1 = -\frac{\partial t_1}{\partial s} a_1,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\partial t_1}{\partial s} x_1 - \frac{\partial t_1}{\partial s} a_1;$$

dans la troisième

$$-\frac{\partial t_3}{\partial s} x_3 + \sigma_2 \quad \text{avec} \quad \sigma_2 = -\frac{\partial t_2}{\partial s} a_2 - \frac{\partial t_1}{\partial s} a_1,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\partial t_3}{\partial s} x_3 - \frac{\partial t_2}{\partial s} a_2 - \frac{\partial t_1}{\partial s} a_1.$$

Dans l'expression du potentiel interne, le terme relatif aux efforts normaux aura donc pour valeur

$$\frac{1}{2E} \int_L \left[\int_0^{a_1} \left(\frac{\partial t_2}{\partial s} \right)^2 x_1^2 dx_1 \right] \frac{ds}{\varepsilon_1} + \frac{1}{2E} \int_L \left[\int_0^{a_2} \left(\frac{\partial t_2}{\partial s} x_2 + \frac{\partial t_1}{\partial s} a_1 \right)^2 dx_2 \right] \frac{ds}{\varepsilon_2} + \frac{1}{2E} \int_L \left[\int_0^{a_3} \left(\frac{\partial t_3}{\partial s} x_3 + \frac{\partial t_2}{\partial s} a_2 + \frac{\partial t_1}{\partial s} a_1 \right)^2 dx_3 \right] \frac{ds}{\varepsilon_3}.$$

Le terme relatif aux efforts de cisaillement est

$$\frac{2}{2E} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \int_L \left[\frac{t_1^2 a_1}{\varepsilon_1} + \frac{t_2^2 a_2}{\varepsilon_2} + \frac{t_3^2 a_3}{\varepsilon_3} \right] ds.$$

Le potentiel interne sera donc de la forme

$$\int_L \left[P_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial s} \right)^2 + P_2 \left(\frac{\partial t_2}{\partial s} \right)^2 + P_3 \left(\frac{\partial t_3}{\partial s} \right)^2 + Q_{12} \frac{\partial t_1}{\partial s} \frac{\partial t_2}{\partial s} + Q_{23} \frac{\partial t_2}{\partial s} \frac{\partial t_3}{\partial s} + Q_{31} \frac{\partial t_3}{\partial s} \frac{\partial t_1}{\partial s} + R_1 t_1^2 + R_2 t_2^2 + R_3 t_3^2 \right] ds,$$

$P_1, \dots; Q_{12}, \dots; R_1, \dots$, étant des quantités indépendantes de x .

Les fonctions t_1, t_2, t_3 , doivent vérifier les équations de projections et de moment

$$\begin{aligned} \int_L t_1 \frac{dy}{ds} ds &= F_y, & \int_L t_1 \frac{dz}{ds} ds &= F_z, & \int_L t_1 p ds &= M_x; \\ \int_L t_2 \frac{dy}{ds} ds &= F_y, & \dots & \dots & \dots & \dots; \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned}$$

La fonction Φ à considérer sera donc

$$\begin{aligned} \Phi &= P_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial s} \right)^2 + \dots + Q_{12} \frac{\partial t_1}{\partial s} \frac{\partial t_2}{\partial s} + \dots + R_1 t_1^2 + \dots \\ &\quad + A_1 t_1 \frac{dy}{ds} + B_1 t_1 \frac{dz}{ds} + C_1 t_1 p + \dots + A_2 t_2 \frac{dy}{ds} + \dots; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t_1} &= 2R_1 t_1 + A_1 \frac{dy}{ds} + B_1 \frac{dz}{ds} + C_1 p, & \frac{\partial \Phi}{\partial \frac{\partial t_1}{\partial s}} &= 2P_1 \frac{\partial t_1}{\partial s} + Q_{12} \frac{\partial t_2}{\partial s} + Q_{31} \frac{\partial t_3}{\partial s}; \end{aligned}$$

d'où l'équation différentielle

$$2R_1 t_1 + A_1 \frac{dy}{ds} + B_1 \frac{dz}{ds} + C_1 p - \frac{\partial}{\partial s} \left[2P_1 \frac{\partial t_1}{\partial s} + Q_{12} \frac{\partial t_2}{\partial s} + Q_{31} \frac{\partial t_3}{\partial s} \right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$2P_1 t_1'' + Q_{12} t_2'' + Q_{31} t_3'' - 2R_1 t_1 = A_1 \frac{dy}{ds} + B_1 \frac{dz}{ds} + C_1 p$$

et deux autres équations

$$Q_{12} t_1'' + 2P_2 t_2'' + Q_{23} t_3'' - 2R_2 t_2 = A_2 \frac{dy}{ds} + B_2 \frac{dz}{ds} + C_2 p,$$

$$Q_{31} t_1'' + Q_{23} t_2'' + 2P_3 t_3'' - 2R_3 t_3 = A_3 \frac{dy}{ds} + B_3 \frac{dz}{ds} + C_3 p.$$

Les solutions intégrales de ce système de trois équations différentielles contiennent six constantes arbitraires. On aura pour déterminer ces constantes six équations en écrivant que pour $s = 0$ et $s = l$, t_1 , t_2 , t_3 gardent la même valeur et aussi $\frac{\partial t_1}{\partial s}$, $\frac{\partial t_2}{\partial s}$ et $\frac{\partial t_3}{\partial s}$ dans le cas d'un contour fermé.

Dans le cas où les cadres sont nombreux et très rapprochés, on pourra admettre que leur action est continue et que la fonction t est une fonction continue de s et de x . En conduisant le calcul toujours de la même façon, on obtiendra une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre à laquelle doit satisfaire la fonction t .



CHAPITRE IV.

INFLUENCE DES OUVERTURES DANS LES COQUES SUR LA DISTRIBUTION DES TENSIONS.

Tout changement de la distribution des efforts dans une coque cylindrique ne peut avoir lieu qu'à l'aplomb d'un cadre puisque, d'après ce que nous avons vu et en raison de la faible épaisseur de la tôle, dans une même travée les efforts de cisaillement doivent rester constants. La perturbation apportée dans la distribution des efforts de cisaillement par la présence d'une ouverture, n'affecte pas seulement la travée dans laquelle est pratiquée l'ouverture, mais les travées qui la précèdent et qui la suivent. Nous allons supposer, dans ce qui suit, à moins d'indication contraire que seule la travée ouverte et les travées contiguës sont influencées et que, si l'on considère l'équilibre de l'ensemble des trois travées, les forces appliquées qui sont, en fait, des forces intérieures sont réparties suivant la loi de Saint-Venant. Nous allons considérer deux cas : celui de la torsion pure et celui de la flexion pure.

I. — CAS DE LA TORSION PURE.

En admettant les mêmes hypothèses que dans le chapitre précédent, les forces intérieures se ramènent à un effort tangentiel t et à un effort normal n , rapportés tous les deux à l'unité de longueur. Dans une même travée, t ne dépend que de l'arc s et n est une fonction de l'arc variant linéairement avec l'abscisse. Si dans la travée II, par exemple, l'effort de cisaillement est t_2 , l'effort normal sera

$$-\frac{\partial t_2}{\partial s}x + \sigma_1.$$

Dans l'expression du potentiel interne, le terme relatif aux forces normales est calculé pour une travée de longueur L_2 a pour valeur

$$W_2 = \frac{1}{2E} \iint \left(-\frac{\partial t_2}{\partial s}x + \sigma_1 \right) dx \frac{ds}{\varepsilon} = \frac{1}{2E} \int \left[\left(\frac{\partial t_2}{\partial s} \right)^2 \frac{L_2^3}{3} - \sigma_1 \frac{\partial t_2}{\partial s} L_2^2 + \sigma_1^2 L_2 \right] \frac{ds}{\varepsilon}.$$

Dans la travée I, l'effort normal a pour valeur $-\frac{\partial t_1}{\partial s}x$, car on a supposé qu'à l'origine de cette travée, la répartition des efforts était conforme à la théorie de

Saint-Venant, et dans le cas de la torsion, les contraintes normales sont nulles. Toujours en ne prenant en considération que les forces normales, le potentiel interne de la travée est

$$W_1 = \frac{1}{2E} \int \left(\frac{\partial t_1}{\partial s} \right)^2 \frac{L_1^3}{3} \frac{ds}{\varepsilon}$$

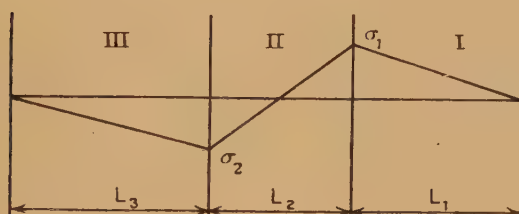
et de même pour la travée III, on a

$$W_3 = \frac{1}{2E} \int \left(\frac{\partial t_3}{\partial s} \right)^2 \frac{L_3^3}{2} \frac{ds}{\varepsilon};$$

mais

$$-\frac{\partial t_1}{\partial s} L_1 = \sigma_1, \quad -\frac{\partial t_2}{\partial s} L_2 + \sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{et} \quad -\frac{\partial t_3}{\partial s} L_3 + \sigma_2 = 0.$$

Fig. 20.



On en déduit

$$\frac{\partial t_3}{\partial s} L_3 = \sigma_1 - \frac{\partial t_2}{\partial s} L_2 \quad \text{et} \quad W_1 = \frac{1}{2E} \int \sigma_1^2 \frac{L_1}{3} \frac{ds}{\varepsilon},$$

$$W_3 = \frac{1}{2E} \frac{L_3}{3} \int \left[\sigma_1^2 - 2\sigma_1 \frac{\partial t_2}{\partial s} L_2 + \left(\frac{\partial t_2}{\partial s} \right)^2 L_2^2 \right] \frac{ds}{\varepsilon},$$

d'où

$$2E(W_1 + W_2 + W_3) = \int \left[\left(\frac{\partial t_2}{\partial s} \right)^2 \frac{L_2^2}{3} (L_2 + L_3) - \sigma_1 \frac{\partial t_2}{\partial s} L_2 \left(L_2 + \frac{2}{3} L_3 \right) + \sigma_1^2 \left(L_2 + \frac{L_1 + L_3}{3} \right) \right] \frac{ds}{\varepsilon},$$

expression de la forme

$$\int \left[\alpha \left(\frac{\partial t_2}{\partial s} \right)^2 + \beta \sigma_1 \frac{\partial t_2}{\partial s} + \gamma \sigma_1^2 \right] \frac{ds}{\varepsilon},$$

en posant

$$\alpha = \frac{L_2^2}{3} (L_2 + L_3), \quad \beta = -L_2 \left(L_2 + \frac{2}{3} L_3 \right), \quad \gamma = L_2 + \frac{L_1 + L_3}{3}.$$

Les équations de projections et de moments sont les suivantes :

$$\int_0^l t_2 \frac{dy}{ds} ds = 0, \quad \int_0^l t_2 \frac{dz}{ds} ds = 0, \quad \int_0^l t_2 p ds = M_x.$$

Si donc on estime prépondérant le terme relatif aux forces normales dans l'expression du potentiel interne, on aura à considérer l'expression

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\alpha \left(\frac{\partial t_2}{\partial s} \right)^2 + \beta \sigma_1 \frac{\partial t_2}{\partial s} + \gamma \sigma_1^2 \right] + \lambda t_2 \frac{dy}{ds} + \mu t_2 \frac{dz}{ds} + \nu t_2 p; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t_2} &= \lambda \frac{dy}{ds} + \mu \frac{dz}{ds} + \nu p, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial t_2}{\partial s} \right)} &= \left(2\alpha \frac{\partial t_2}{\partial s} + \beta \sigma_1 \right) \frac{1}{\varepsilon}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_1} &= \left(\beta \frac{\partial t_2}{\partial s} + 2\gamma \sigma_1 \right) \frac{1}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Les fonctions t_2 et σ_1 doivent satisfaire aux relations

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_2} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial t_2}{\partial s} \right)} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\lambda \frac{dy}{ds} + \mu \frac{dz}{ds} + \nu p \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{2\alpha}{\varepsilon} \frac{\partial t_2}{\partial s} + \frac{\beta}{\varepsilon} \sigma_1 \right] = 0, \quad \beta \frac{\partial t_2}{\partial s} + 2\gamma \sigma_1 = 0.$$

On en déduit

$$\sigma_1 = - \frac{\beta}{2\gamma} \frac{\partial t_2}{\partial s}$$

et

$$\left(\lambda \frac{dy}{ds} + \mu \frac{dz}{ds} + \nu p \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial t_2}{\partial s} \left(2\alpha - \frac{\beta^2}{2\gamma} \right) \right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial t_2}{\partial s} \right) = A \frac{dy}{ds} + B \frac{dz}{ds} + Cp$$

et t_2 est donnée par l'expression (21) établie précédemment

$$(21) \quad t_2 = A \int_0^s \varepsilon y ds + B \int_0^s \varepsilon z ds + 2C \int_0^s \varepsilon \Omega ds + D \int_0^s \varepsilon ds + F.$$

Nous avons vu que, dans le cas où les axes de référence sont les axes principaux d'inertie, on a

$$\begin{aligned}D &= -C \frac{\int_0^l 2\varepsilon \Omega ds}{\int_0^l \varepsilon ds}; \\ A I_x + 2C \int_0^l \varepsilon \Omega y ds &= F_y, \\ B I_y + 2C \int_0^l \varepsilon \Omega z ds &= F_z;\end{aligned}$$

t_2 étant connue, il est facile de calculer les tensions normales et tangentielles dans les différentes travées

$$\sigma_1 = -\frac{\beta}{2\gamma} \frac{\partial t_2}{\partial s}.$$

Il en résulte

$$\sigma_2 = -\frac{\partial t_2}{\partial s} \left(L_2 + \frac{\beta}{2\gamma} \right), \quad \frac{\partial t_1}{\partial s} = -\frac{1}{L} \sigma_1 = \frac{\beta}{2\gamma} \frac{1}{L} \frac{\partial t_2}{\partial s},$$

d'où

$$t_1 = \frac{\beta}{2\gamma} \frac{1}{L_1} t_2 + \text{const.}$$

La constante d'intégration est déterminée par le fait que les efforts t_1 comme les efforts t_2 sont équivalents au moment de torsion M_x

$$t_1 = \frac{\beta}{2\gamma} \frac{1}{L_1} t_2 + \frac{M_x}{2\Omega_0} \left(1 - \frac{\beta}{2\gamma} \frac{1}{L_1} \right)$$

en désignant par Ω_0 l'aire déterminée par le contour fermé. Dans la travée III, les efforts normaux varient suivant la loi

$$\sigma = \sigma_2 \left(1 - \frac{x}{L_3} \right),$$

x étant compris entre 0 et L_3 , c'est-à-dire

$$\sigma = -\left(1 - \frac{x}{L_3} \right) \left(L_2 + \frac{\beta}{2\gamma} \right) \frac{\partial t_2}{\partial s}$$

et, par suite,

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{L_3} \left(L_2 + \frac{\beta}{2\gamma} \right) \frac{\partial t_2}{\partial s} = \frac{\partial t_3}{\partial s}.$$

Il en résulte

$$t_3 = \frac{t_2}{L_3} \left(L_2 + \frac{\beta}{2\gamma} \right) + \text{const.}$$

Comme les efforts t_3 sont équivalents au moment de torsion M_x , on aura

$$t_3 = \frac{t_2}{L_3} \left(L_2 + \frac{\beta}{2\gamma} \right) + \frac{M_x}{2\Omega_0} \left[1 - \frac{1}{L_3} \left(L_2 + \frac{\beta}{2\gamma} \right) \right].$$

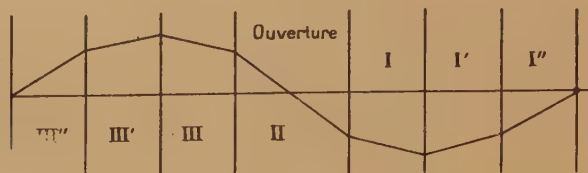
Les efforts de cisaillement régnant dans la tôle de part et d'autre d'un même cadre étant déterminés, il est possible de calculer les fatigues dans les cadres. Les cadres sont en effet soumis en tous les points de leur contour à des efforts tangentiels équivalents à zéro. Pour les cadres successifs délimitant les trois travées considérées, ces efforts tangentiels ont respectivement pour valeur

$$t_0 - t_1, \quad t_1 - t_2, \quad t_2 - t_3, \quad t_3 - t_4.$$

Nous avons dans ce qui précède négligé le travail de cisaillement de la tôle ainsi que le travail de déformation des cadres. Il nous apparaît très difficile en particulier de calculer l'influence de la rigidité de ceux-ci sur la valeur des

tensions t_1, t_2, t_3 . Lorsque les longueurs L_2 et L_3 sont faibles, les efforts dans les cadres peuvent atteindre des valeurs importantes. Dans ce cas, il faut admettre que plusieurs travées avant et après l'ouverture sont influencées par

Fig. 21.



la présence du trou et le diagramme des efforts normaux est celui indiqué sur la figure.

Si l'on admet que la tension de cisaillement dans la travée ouverte est inchangée, on aura dans une travée quelconque, par exemple I',

$$t'_1 = K'_1 t_2 + \frac{M_x}{2\Omega} (1 - K'_1)$$

et l'on sera amené à calculer un certain nombre de coefficients $K_1, K'_1, K''_1; K_3, K'_3, K''_3$ rendant minimum le potentiel interne de l'ensemble formé par le revêtement et les cadres. Le calcul des cadres dans ces conditions ne présente plus de difficultés car les forces qui les sollicitent ne dépendent que des coefficients K . Par exemple, le cadre qui délimite les travées I et I' est soumis à des efforts tangentiels ayant pour valeur par unité de longueur

$$t_2(K_1 - K'_1) - \frac{M_x}{2\Omega}(K_1 - K'_1) = (K_1 - K'_1) \left(t_2 - \frac{M_x}{2\Omega} \right).$$

II. — CAS DE LA FLEXION.

On suppose les forces extérieures réduites à une force unique F rencontrant à angle droit la parallèle à l'axe du cylindre passant par le centre de torsion de la section ouverte. La répartition des tensions de cisaillement est perturbée dans les travées I et III, situées de part et d'autre de la travée II, dans laquelle se trouve l'ouverture, mais on suppose que les tensions intérieures équivalentes à la force F , au début de la travée I ou à la fin de la travée III, sont distribuées suivant la loi de Saint-Venant.

Comme précédemment, les efforts de cisaillement gardent dans une même travée une même distribution, et les efforts normaux varient avec l'abscisse suivant une loi linéaire.

Dans les travées I et III, et dans les régions situées au-dessus de l'ouverture, les efforts normaux varient respectivement de n_0 à 0 et de 0 à n_3 . Pour faire

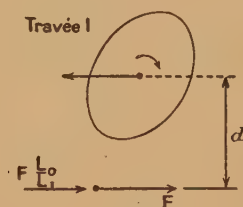
passer ainsi les efforts d'une valeur donnée à une valeur nulle, il suffit d'appliquer au centre de torsion de la section fermée une force F_1 égale $-F \frac{L_0}{L_1}$ pour la travée I et une force F_3 égale à $F \frac{L_0 + L_1 + L_2 + L_3}{L_3}$ pour la travée III. Ces forces sont appliquées à l'aplomb des cadres 1 et 3 et L_0 est la

Fig. 22.



distance du plan du cadre 1 à la force F . Pour rétablir l'équilibre, il faut adjoindre aux forces ci-dessus des forces qui leur sont égales et opposées appliquées au centre de torsion de la section ouverte et des couples qui agissant sur le contour fermé ne modifient pas la distribution des efforts normaux.

Fig. 23.



Par exemple dans le cas de la travée I, on applique au contour fermé une force $-F \frac{L_0}{L_1}$; un couple $-F \frac{L_0}{L_1} d$ et au contour ouvert une force égale à $F \left(\frac{L_0}{L_1} + 1 \right)$. Dans le cas de la travée III, on applique au contour fermé une force

$$\frac{F}{L_3} (L_0 + L_1 + L_2 + L_3);$$

un couple

$$\frac{F}{L_3} (L_0 + L_1 + L_2 + L_3) d$$

et au contour ouvert une force égale à

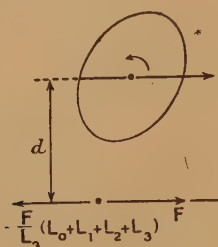
$$F \left(1 - \frac{L_0 + L_1 + L_2 + L_3}{L_3} \right).$$

On peut calculer sous l'influence de ces forces la valeur des tensions normales dans les différentes travées.

En désignant par $\frac{I}{\rho}$ le module de résistance de la section fermée et $\frac{I'}{\rho'}$ celui de la section ouverte, on a à l'origine de la travée II

$$n_1 = n_0 + F \left(\frac{L_0}{L_1} + 1 \right) \frac{L_1}{I'} - F \frac{L_0}{L_1} \frac{L_1}{I} = F (L_0 + L_1) \frac{I}{I'};$$

Fig. 24.



à l'origine de la travée III, on a

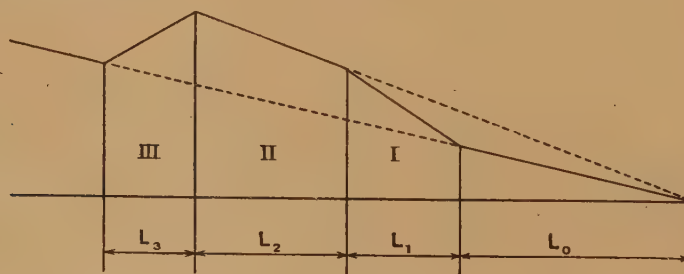
$$n_2 = n_1 + F \frac{L_2}{I'} = F (L_0 + L_1 + L_2) \frac{I}{I'}.$$

Enfin à l'extrémité de la travée III, on a pour fatigue

$$\begin{aligned} n_3 + F \left(1 - \frac{L_0 + L_1 + L_2 + L_3}{L_3} \right) \frac{L_3}{I'} + F \left(\frac{L_0 + L_1 + L_2 + L_3}{L_3} \right) \frac{L_3}{I} \\ = F (L_0 + L_1 + L_2 + L_3) \frac{I}{I}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire la fatigue n_3 .

Fig. 25.



La figure 25 représente le diagramme des fatigues.

Vu et approuvé :

Paris, le 17 mars 1945.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
P. MONTEL.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
G. ROUSSY.

TABLE DES MATIÈRES.

Analyse Bibliographique.....	Pages. I
------------------------------	-------------

CHAPITRE I.

Détermination des équations générales de l'élasticité par le calcul des variations.

I. Généralités.....	3
II. Rappel de quelques résultats de la théorie du Calcul des Variations.....	3
III. Rappel de quelques éléments de la théorie des Contraintes.....	4
IV. La loi de Hooke et ses conséquences.....	7
<i>a.</i> Le théorème de Castigliano.....	7
<i>b.</i> Calcul du Potentiel interne en fonction des tensions en Milieu isotrope.....	9
<i>c.</i> Détermination des déplacements en fonction des tensions.....	10
V. Le théorème du travail minimum.....	12
VI. Établissement à l'aide du Calcul des Variations des équations générales de l'électricité.....	14
VII. Conclusions.....	15

CHAPITRE II.

Applications à quelques cas concrets.

I. Champ de tensions diagonales dans une tôle mince.....	17
II. Résistance des enveloppes cylindriques.....	19
III. Calcul des fatigues dans les pièces courbes.....	21
IV. Résistance des plaques circulaires.....	23
<i>a.</i> Cas de la plaque appuyée.....	26
<i>b.</i> Cas de la plaque encastrée.....	26

CHAPITRE III.

Application au calcul des coques.

I. Généralités.....	28
II. Influence de la longueur d'une poutre sur la répartition des tensions.....	30
<i>a.</i> Efforts entre extrémité et appui.....	30
<i>b.</i> Efforts entre appuis.....	31
<i>c.</i> Recherche du minimum du potentiel interne.....	31
<i>d.</i> Détermination des constantes d'intégration.....	32
III. Cas de la poutre illimitée.....	33
<i>a.</i> Cas d'un contour fermé.....	33
<i>b.</i> Cas d'un contour ouvert.....	36
IV. Cas de la poutre infiniment courte.....	40
V. Cas général.....	43

CHAPITRE IV.

Influence des ouvertures dans les coques sur la distribution des tensions.

I. Cas de la torsion pure.....	46
II. Cas de la flexion.....	50



SECONDE THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ



Étude des vibrations des structures d'avions.



Vu et approuvé :

Paris, le 17 mars 1945.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

P. MONTEL.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

G. ROUSSY.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

121308-45

Dépôt légal 1945, n° 82.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

121308

Quai des Grands-Augustins, 55.
